∽ CONCOURS POUR L'ADMISSION EN FORMATION DES INGÉNIEURS ∾
DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE MARITIME
ANNÉE 2017

Durée : 2 heures

Le candidat traitera 3 questions au choix parmi les 4 proposées, chaque question représentant le même nombre de points.
Les 4 questions proposées sont indépendantes.

1re question

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 - 4x^2 - x + 2.$$

a. Calculer $g'(x)$ et en déduire le tableau de variations de g (on ne cherchera pas à calculer les valeurs des extremums de g).

b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;2]$.

c. En déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur l'intervalle $[0\,;2]$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra utiliser la valeur approchée $\alpha \approx 0,64$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x^2}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. On sait que $\mathscr{C}_f$ coupe d'axe des ordonnées au point A$(0\,;\,4)$ et que sa tangente en A a pour coefficient directeur -1.

Démontrer que $f(x) = (-x+4)\mathrm{e}^{-x^2}$.

b. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;2]$ on définit les points suivants :

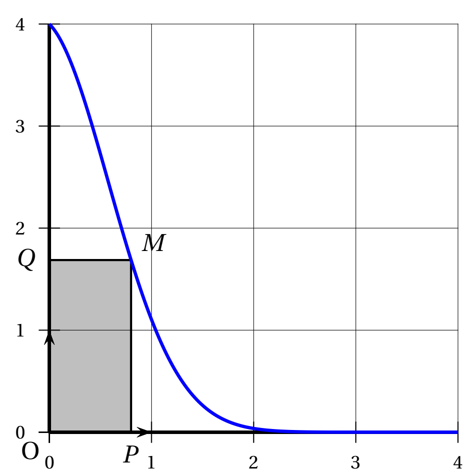
M le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$

P le point de coordonnées $(x\,;\,0)$

Q le point de coordonnées $(0\,;\,f(x))$.

On note $A(x)$ l'aire du rectangle OPMQ.

La figure ci-contre sur laquelle une partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée rappelle ces notations.



c. i. Exprimer $A(x)$ en fonction de x.

ii. Démontrer que $A'(x)$ est du signe de $g(x)$ et en déduire la valeur de x pour laquelle $A(x)$ est maximale.

iii. Démontrer que lorsque $A(x)$ est maximale, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en M est parallèle à la droite (QP)

3. On note S l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

a. Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 -x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (on donnera la valeur exacte).

b. On donne $J = \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0,882$.

En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de S.

c. Est-il possible de placer le point M pour que l'aire du rectangle OPMQ soit égale à la moitié de l'aire S ?

2^e^ question

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par

$$f(x) = \frac{2x}{1+2x}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Sur le graphique donné en annexe (dernière page du sujet), on a tracé la courbe C représentative de f.

a. En utilisant une méthode graphique, construire les points de C d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3 (aucun calcul n'est attendu).

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. **a.** Étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier nature n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On considère à présent la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1-2u_n}{u_n}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b. Déterminer l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

d. Déterminer le premier entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant 0{,}501$.

3^e^ question

Une entreprise produit et commercialise des puces GPS.
Elle dispose de 3 centres de productions A, B et C qui produisent respectivement 60 %, 25 % et 15 % des puces électroniques.
Après leur sortie des centres de production, ces puces sont regroupées dans les laboratoires du contrôle qualité, où elles sont testées pour savoir si elles sont commercialisables.
L'expérience a montré que 80 % des puces sortant du centre de production A, 95 % des puces sortant du centre de production B, et 86,45 % de l'ensemble des puces produites sont sélectionnées à l'issue de ce test comme étant commercialisables.

1. Un technicien du contrôle qualité prélève une puce au hasard pour lui faire passer le test.
On notera les évènements suivants :
A : « La puce est issue du centre de production A », de même pour B et pour C.
T : « La puce est sélectionnée à l'issue du test comme étant commercialisable »

a. Décrire la situation par un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que la puce provienne du centre A et soit commercialisable.

c. Calculer la probabilité qu'une puce provenant du centre de production C soit commercialisable.

d. Le responsable du centre de production C affirme que parmi les puces commercialisables, plus de 17 % proviennent de son centre de production. Justifier cette affirmation par un calcul de probabilité.

2. Pour faire les tests, les techniciens reçoivent les puces par lots de 12. On note X la variable aléatoire qui à un lot choisi au hasard associe le nombre de puces commercialisables qu'il contient.

a. Donner la loi de probabilité que suit la variable aléatoire X en justifiant votre réponse.

b. Calculer la probabilité qu'au moins une puce du lot ne soit pas commercialisable.

c. On envisage de modifier le nombre de puces par lot. Déterminer la taille minimale des lots pour que la probabilité qu'un lot contienne au moins une puce non commercialisable soit supérieur à 0,95.

3. On estime que la durée de vie de ces puces GPS suit une loi exponentielle de paramètre λ et on note T la variable aléatoire qui à une puce choisie au hasard associe sa durée de vie en années.

On a pu mesurer qu'au bout de 5 ans, la moitié des puces sont défectueuses.

a. Déterminer la valeur de λ.

b. En déduire la durée de vie moyenne de ces puces.

c. Un bateau de plaisance doit partir pour une croisière de 2 ans. Il est équipé d'un dispositif qui utilise l'une de ces puces et qui a été acheté neuf il y a 4 ans.

Quelle est la probabilité que la puce connaisse une panne durant cette croisière ?

4^e^ question

1. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + (2-2\text{i})z^2 + (4-4\text{i})z - 8\text{i}.$$

a. Démontrer que 2i est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

b. Démontrer que $P(z) = (z-2\text{i})\left(z^2+2z+4\right)$.

c. En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2. *Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé* $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

On réalisera une figure sur l'annexe donnée en dernière page du sujet.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_{\text{A}} = 1+\text{i}\sqrt{3}$, $z_{\text{B}} = 1-\text{i}\sqrt{3}$, et $z_{\text{C}} = -2$.

a. Déterminer le module et un argument de chacun des trois nombres complexes z_{A}, z_{B} et z_{C} puis les écrire en notation exponentielle.

b. Placer les points A, B et C sur une figure donnée en annexe que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

On note $Z = \dfrac{z_{\text{A}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{C}}}$.

c. Déterminer la forme algébrique de Z.

d. Calculer le module et un argument de Z.

e. En déduire la nature du triangle ABC.

3. À tout point M d'affixe z (avec $z \neq z_{\text{B}}$), on associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{1+\text{i}\sqrt{3}-z}{1-\text{i}\sqrt{3}-z}.$$

(On pourra remarquer que $z' = \dfrac{z_{\text{A}} - z}{z_{\text{B}} - z}$.)

a. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Démontrer que si M appartient au cercle de diamètre [AB] privé de B alors M' appartient à l'axe $\left(\text{O} ; \overrightarrow{v}\right)$.

c. On note D le point d'intersection entre le cercle de diamètre [AB] et l'axe réel, tel que DBA soit un triangle rectangle direct.

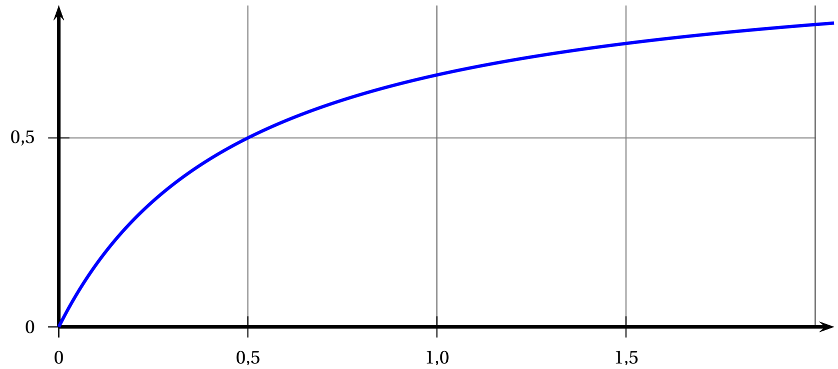
Construire le point D$'$ associé au point D en justifiant la construction.

Nota :

1. Aucun document n'est autorisé.
2. Délits de fraude : « Tout candidat pris en flagrant délit de fraude ou convaincu de tentative de fraude se verra attribuer la note zéro, éliminatoire, sans préjudice de l'application des sanctions prévues par les lois et règlements en vigueur réprimant les fraudes dans les examens et concours publics ».

Annexes à rendre avec la copie

Annexe - 2^{e} question



Annexe - 4^{e} question