∽ CONCOURS POUR L'ADMISSION EN FORMATION DES ∾ INGÉNIEURS DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE MARITIME ANNÉE 2016

Durée : 2 heures

1re QUESTION (Valeur = 4)

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins notés A et B.
L'eau que contient le bassin A étant destinée à rafraîchir un certain dispositif, une circulation est créée entre les deux bassins à l'aide d'un système de pompes.
Le bassin A a une capacité de 1 200 m^3. Initialement, il contient 800 m^3 d'eau.
Toutes les 24 heures, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B est transféré vers le bassin A alors que 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A est transféré vers le bassin B.
Pour tout tout entier $n \geqslant 1$, on note :

- a_n le volume d'eau en m^3 contenu dans le bassin A le n-ième jour de fonctionnement,
- b_n le volume d'eau en m^3 contenu dans le bassin B le n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_1 = 800$.

1. **a.** Par quelle égalité liant a_n et b_n, la conservation du volume d'eau dans le circuit se traduit-elle ?

   b. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,75a_n + 330$.

2. **a.** Le plan étant muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm représente 200 m^3), on note D et D' les droites d'équations $y = x$ et $y = 0,75x + 330$.
   Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (a_n).

   b. On note (u_n) la suite numérique définie par :

   $$u_n = a_n - 1320 \text{ pour tout entier } n \geqslant 1.$$

   i. Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

   ii. En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de a_n en fonction de n.

   c. Au bout de combien de jours, conviendra-t-il de stopper la circulation entre les deux bassins pour éviter le débordement du bassin A ?

2e QUESTION (Valeur = 5)

1. Montrer que l'équation (E) : $x^3 = 3x - 1$ admet trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$, notées x_1, x_2, x_3, avec $x_1 < x_2 < x_3$, toutes trois comprises entre les valeurs -2 et 2.

2. On se propose dans la suite, de déterminer les valeurs exactes de ces trois solutions.

   a. On rappelle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\text{e}^{\text{i}\theta} = \cos(\theta) + \text{i}\sin(\theta)$.
   Déduire de l'égalité $\text{e}^{3\text{i}t} = \left(\text{e}^{\text{i}t}\right)^3$ (valable pour tout $t \in \mathbb{R}$), que :

   $$\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

b. Soit x l'une quelconque des solutions de (E).
x étant comprise entre les valeurs -2 et 2, il existe un unique réel $t \in [0\,;\,\pi]$ tel que : $x = 2\cos(t)$.
Déduire de la question précédente que $t \in [0\,;\,\pi]$ est tel que :

$$1 + 2\cos(3t) = 0$$

et déterminer les valeurs exactes de x_1, x_2 et x_3.

3$^{\text{e}}$ QUESTION (Valeur = 6)

Un passionné d'électronique utilise un certain type de composant noté C, dont la durée de vie en semaines suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'un tel composant ?
2. Ce composant C est nécessaire à la transmission d'un signal particulier.
Afin de gagner en fiabilité dans la transmission de ce signal, notre passionné d'électronique vient monter deux de ces composants en parallèle ; le signal peut ainsi être transmis tant que l'un au moins des deux composants est en état de marche.
Les durées de vie de ces deux composants sont supposées indépendantes.
On note :
   - T_1 la variable aléatoire mesurant la durée de vie en semaines, du composant n$^{\text{o}}$ 1,
   - T_2 la variable aléatoire mesurant la durée de vie en semaines, du composant n$^{\text{o}}$ 2,
   - T la variable aléatoire mesurant la durée de vie en semaines, du système constitué par l'association en parallèle de ces deux composants.

   a. Déterminer en fonction de t (t réel positif exprimé en semaines), la probabilité que ce système cesse de fonctionner avant la date t.

   b. On rappelle que la fonction densité de probabilité, f de la variable aléatoire T, est la fonction numérique f telle que :

$$P(T \leqslant t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall t \geqslant 0.$$

   En déduire que f est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 0,04\left(\mathrm{e}^{-0,02x} - \mathrm{e}^{-0,04x}\right).$$

   c. La durée de vie moyenne en semaines de ce système est le réel $E(T)$ défini par :

$$E(T) = \lim_{t \to +\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   i. k désignant une constante réelle non nulle, montrer qu'une primitive sur $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto x \times \mathrm{e}^{kx}$ est la fonction $x \longmapsto (\alpha x + \beta) \times \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x$ où α et β désignent deux constantes réelles dont vous donnerez les expressions en fonction de k.

   ii. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de t, puis la limite quand t tend vers $+\infty$ de cette intégrale.
   De quel pourcentage, ce système augmente-t-il le temps moyen de bonne transmission du signal (sous-entendu par rapport à l'emploi d'un composant unique) ?

4$^{\text{e}}$ QUESTION (Valeur = 5)

Cet exercice est un « Vrai-Faux » avec justification.
Il est constitué de 4 affirmations indépendantes ; pour chacune d'elles, vous devrez indiquer, *en le justifiant*, si elle est vraie ou fausse.
Une réponse injustifiée ne rapportera aucun point.
En revanche, toute tentative pertinente de justification sera prise en compte.

1. Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n désigne le point de $\mathscr{P}$ dont l'affixe z_n est définie par :
   $\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 1 \\ z_{n+1} & = & \left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right) z_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$

   Vrai ou Faux ? Le triangle $\text{O}M_nM_{n+1}$ est un triangle rectangle.
2. Les données sont celles de la question précédente.

   Vrai ou Faux ? Il n'existe aucune valeur de n pour laquelle M_n est un point de l'axe $\left(\text{O},\ \vec{u}\right)$.
3. L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

   On considère les points $\text{A}(-3 ; 1 ; 1)$ et $\text{B}(-1 ; -3 ; -1)$ ainsi que le plan P d'équation $x - 2y - z = 0$.

   Vrai ou Faux ? B est le symétrique de A par rapport au plan $\mathscr{P}$
4. **Vrai ou Faux ?** Lorsque $\frac{1}{\text{e}} \leqslant x \leqslant \text{e}$, l'expression $\ln(x) + \dfrac{1}{x}$ est majorée par $\text{e} - 1$.

Nota :

1. Tout document est interdit.
2. L'usage d'une calculatrice électronique à fonctionnement autonome, non programmable, non programmée, non imprimante, avec entrée unique par clavier est seul autorisé.
3. *Délits de fraude : « Tout candidat pris en flagrant délit de fraude ou convaincu de tentative de fraude risque l'élimination, sans préjudice de l'application des sanctions prévues par les lois et règlements en vigueur réprimant les fraudes dans les examens et concours publics ».*