∽ CONCOURS POUR L'ADMISSION EN FORMATION DES ∾ INGÉNIEURS DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE MARITIME ANNÉE 2014

Durée : 2 heures

Tout document est *interdit*. L'usage d'une calculatrice électronique à fonctionnement autonome, non programmable, non programmée, non imprimante, avec entrée unique par clavier est seul autorisé.

Délits de fraude : « tout candidat pris en flagrant délit de fraude ou convaincu de tentative de fraude sera immédiatement exclu de la salle d'examen (sa note sera égale à zéro) sans préjudice de l'application des sanctions prévues par les lois et règlements en vigueur réprimant les fraudes dans les examens et concours publics ».

Le sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9.

L'épreuve est constituée de 16 questions indépendantes. Vous devez en traiter 12 au choix, sur les 16 proposées.

Chaque question vous propose 3 affirmations.

Pour chacune d'elles, vous devez indiquer si elle est vraie ou fausse.

Aucune justification n'est demandée.

Vous avez le droit de vous abstenir de répondre à certaines affirmations.

Le barème sera le suivant :

* $+1$ pour toute réponse correcte, -1 pour toute réponse incorrecte, 0 en l'absence de réponse.
* Une bonification d'un point sera attribuée à toute question ayant été intégralement traitée de façon correcte.

Le total des points que vous obtiendrez à cette épreuve (bonifications comprises) sera sur 36 (12 questions comportant 3 affirmations créditées chacune d'un point) ; il sera ramené sur 20 et arrondi au quart de point immédiatement supérieur afin d'obtenir une note sur 20.

Si ce total excède 36 (suite à des bonifications), la note attribuée sera 20.

Si ce total est strictement négatif, la note attribuée sera 0.

Ainsi le tableau ci-contre signifie que pour la question n$^{\text{o}}$ 0,

* vous estimez que la première affirmation est vraie et que la deuxième est fausse,
* vous ne souhaitez pas vous prononcer sur la troisième.

Si les deux réponses fournies sont correctes, vous obtiendrez $+1+1=2$ points sur cette question.

Si une seule des deux réponses fournies est correcte, vous obtiendrez $+1-1=0$ point sur cette question.

Si aucune des deux réponses fournies n'est correcte, vous obtiendrez $-1-1=-2$ points sur cette question.

Un candidat ayant répondu de façon correcte aux trois affirmations, obtiendra 4 points sur cette question.

QUESTION n$^{\text{o}}$ 0

	Vrai	Faux
Affirmation 1	X	
Affirmation 2		X
Affirmation 3		

1re QUESTION (Valeur = 3)

On considère un ensemble de pions qui sont tous, de couleur blanche ou noire, de forme ronde ou carrée, et ont été confectionnés en plastique ou en bois.
On sait que :

- tout pion en plastique est rond,
- aucun pion blanc n'est en plastique.

De ces informations, on peut déduire que :

1. **Vrai ou Faux?** Un pion rond est en plastique.
2. **Vrai ou Faux?** Pour qu'un pion soit en bois, il suffit qu'il soit blanc ou carré.
3. **Vrai ou Faux?** Il peut exister un pion blanc et rond.

2e QUESTION

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + 10^n \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$
   Vrai ou Faux? $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une valeur rationnelle.
   Un « rationnel » est le quotient de deux entiers.
2. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes telle que : $|z_{n+1}| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Vrai ou Faux? $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites numériques telles que : $u_n \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Vrai ou Faux? $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes.

3e QUESTION

f désigne une fonction numérique définie sur $[1~;~+\infty[$ dont le tableau des variations est le suivant :

x	1	$+\infty$
f	1	$\nearrow$ $+\infty$

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & > & 1 \\ u_{n+1} & = & f(u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$
n désignant un entier naturel, on note (P_n) la propriété : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.

1. **Vrai ou Faux?** La propriété (P_n) est héréditaire.
2. Dans cette affirmation, $u_0 = 2$ et f désigne la fonction définie sur $[1~;~+\infty[$ par :

   $$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

   On admet que le tableau des variations de f sur $[1~;~+\infty[$ est le tableau précédent.
   Vrai ou Faux?La propriété (P_n) est vraie pour tout entier naturel n.

3. C désigne la courbe d'équation $y = x^2 - 1$ dans le plan muni d'un repère.
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par :
- $v_0 > 1$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à C au point d'abscisse v_n avec l'axe des abscisses.

On admet que : $v_n \neq 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Vrai ou Faux? Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$ où f est la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

4e QUESTION

On considère l'algorithme suivant :

Variables	a, b, x, y, z entiers naturels
Entrée	Saisir les valeurs a et b
Initialisation	Affecter à x la valeur a
	affecter à y la valeur b
	affecter à z la valeur 0
Traitement	Tant que $y \neq 0$ faire,
	Si y est pair, alors x reçoit $2 \times x$
	y reçoit $y/2$
	sinon y reçoit $y - 1$
	z reçoit $z + x$
	Fin Si
	Fin Tant que
Sortie	Afficher z

1. **Vrai ou Faux?** Pour $a = 12$ et $b = 25$, le nombre d'itérations effectuées dans la boucle « Tant que » est pair, et la valeur z en sortie correspond au produit $a \times b$.
2. **Vrai ou Faux?** Il existe des valeurs de b pour lesquelles le programme ne s'arrête jamais.
3. **Vrai ou Faux?** Quelles que soient les valeurs de a et b, la suite des valeurs $z + x \times y$ est une suite constante.

5e QUESTION

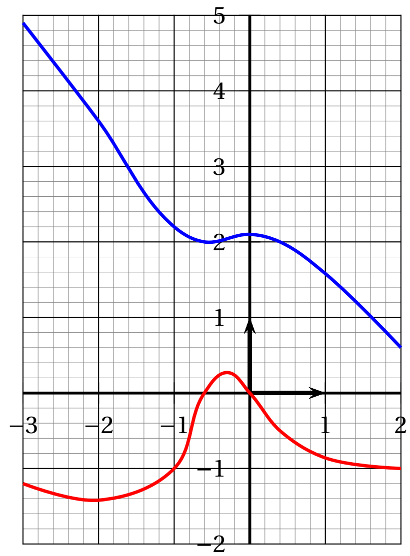
f désigne une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall (x\ ;\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

1. **Vrai ou Faux?** En donnant à x et y des valeurs numériques convenablement choisies, il est possible de déterminer la valeur de $f(0)$.
2. **Vrai ou Faux?** Pour tout nEN, $f(n)$ est proportionnel à n, et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $f(1) = 0$.
3. **Vrai ou Faux?** Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(h)}{h} = \alpha$ avec α constante réelle, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

6e QUESTION

f désigne une fonction numérique définie et dérivable sur $[-3 ; 2]$, f' sa fonction dérivée sur cet intervalle.
L'une des deux courbes notées $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et visualisées ci-dessous, est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal, l'autre est celle de f'.



1. **Vrai ou Faux?** La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 a pour équation $y = -x + 1$.
2. **Vrai ou Faux?** L'aire en (unité d'aire) de la partie plane hachurée est égale à celle de la partie plane grisée.
3. Soit F la fonction numérique définie sur $[-3 ; 2]$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Vrai ou Faux? F est une fonction décroissante sur $[0 ; 2]$.

7e QUESTION

f désigne une fonction numérique définie continue sur $[0 ; 2]$ dont le tableau des variations est le suivant :

x	0		1		2
f	3	$\searrow$	$\frac{9}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\nearrow$	$\frac{9}{\mathrm{e}}$

Pour tout $x \in [0 ; 2]$, on note $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. **Vrai ou Faux?** Il n'est pas possible avec ces seules informations, de préciser la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x)}{x}$.
2. On admet que pour tout $x \in [0 ; 2]$, $F(x) = \int_0^x (3+t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}t + \int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Vrai ou Faux? Une primitive sur $[0 ; 2]$ de la fonction $t \longmapsto (3+t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ est $t \longmapsto -2(5+t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

3. **Vrai ou Faux?** Pour tout $x \in [0~;~2]$, $\dfrac{3}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\, x^3 \leqslant \displaystyle\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{3}{\mathrm{e}} x^3$.

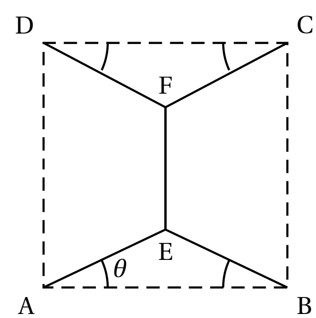
8e QUESTION

1. Un cylindre de rayon 1 dm contient de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm.
On y plonge une bille en plomb de rayon r (r exprimé en dm) tel que : $0 < r < 1$.

   Vrai ou Faux? Le niveau de l'eau est tangent à la bille si et seulement si r est solution sur $]0\,;\,1[$ de l'équation $8r^3 - 12r + 3 = 0$.
   Le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est $\pi r^2 h$,
   le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$.
2. **Vrai ou Faux?** L'équation $2\ln(x) = \ln(x+1) + \ln(2)$ admet exactement deux solutions réelles.
3. Vrai ou Faux? L'équation $x^{2014} = 2014^x$ est équivalente pour $x > 0$ à l'équation $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln(2014)}{2014}$ et admet une unique solution sur $]0~;~+\infty[$.

9e QUESTION

La figure ci-contre représente un réseau autoroutier destiné à relier entre elles, quatre villes distinctes A, B, C, D, situées aux sommets d'un carré.
• L'unité de longueur est choisie de telle sorte que le côté de ce carré est de longueur égale à 1.
• Les angles repérés sur la figure sont de même mesure θ ($\theta \in \left[0~;~\frac{\pi}{4}\right]$).



Pour tout $\theta \in \left[0~;~\frac{\pi}{4}\right]$, on note $f(\theta)$ la longueur du réseau autoroutier correspondant; on admet que :

$$f(\theta) = 1 - \tan(\theta) + \frac{2}{\cos(\theta)} \quad \forall\theta \in \left[0~;~\frac{\pi}{4}\right].$$

1. À la question « montrer que l'équation $f(\theta) = 1+\sqrt{3}$ admet des solutions sur l'intervalle $\left[0~;~\frac{\pi}{4}\right]$ » un élève a commencé par écrire ce qui suit :

* $f~:~\theta \longmapsto f(\theta)$ est continue sur $\left[0~;~\frac{\pi}{4}\right]$. * $f(\theta) = 4 \times \mathrm{AE} + \mathrm{EF}$ avec $4 \times \mathrm{AE} = 4 \times \frac{1}{2\cos(\theta)} = \frac{2}{\cos(\theta)}$ et $\mathrm{EF} = 1 - \tan(\theta)$. Lorsque θ augmente de 0 à $\frac{\pi}{4}$, • la longueur AE augmente (c'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit reste fixe alors que l'autre augmente) de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, • la longueur EF, dans le même temps, diminue de 1 à O. Donc pour tout $\theta \in \left[0~;~\frac{\pi}{4}\right]$, $2 \leqslant f(\theta) \leqslant 1 + 2\sqrt{2}$.

   Vrai ou Faux? Ce qui écrit est correct mais ne garantit pas l'existence de solutions à l'équation $f(\theta) = 1 + \sqrt{3}$ sur l'intervalle $\left[0~;~\frac{\pi}{4}\right]$.
2. **Vrai ou Faux?** Pour tout réel $\theta \in \left[0~;~\frac{\pi}{4}\right]$, $f(\theta) = 1 + \sqrt{3} \iff \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ et l'équation $f(\theta) = 1 + \sqrt{3}$ admet une unique solution sur $\left[0~;~\frac{\pi}{4}\right]$.

3. **Vrai ou Faux?** Pour tout réel $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $f'(\theta)$ est du signe de $1-2\sin(\theta)$ et la longueur du réseau est minimale lorsque les angles $\widehat{\text{AEB}}$, $\widehat{\text{BEF}}$ et $\widehat{\text{FEA}}$ sont de même mesure.

10e QUESTION

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On note $z = -\left(\sqrt{3}+1\right) + \text{i}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

1. **Vrai ou Faux?** $z^2 = 8\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.
2. **Vrai ou Faux?** z est le nombre complexe de module $2\sqrt{2}$ dont un argument est $-\frac{\pi}{12}$.
3. p désigne un entier relatif.
   Vrai ou Faux? Si z^{2p} est imaginaire pur, alors p est un multiple de 3.

11e QUESTION

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
L'affixe de tout point P du plan complexe sera notée z_P.

1. A et B désignent deux points de $\mathscr{P}$ tels que $\dfrac{z_\text{A}}{z_\text{B}} = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
   Vrai ou Faux? Le triangle OAB est rectangle isocèle.
2. A, B, C sont trois points non alignés de $\mathscr{P}$.
   M désigne le point de $\mathscr{P}$ tel que $\dfrac{z_M - z_\text{A}}{z_\text{B} - z_\text{A}}$ et $\dfrac{z_M - z_\text{B}}{z_\text{C} - z_\text{A}}$ sont imaginaires purs.
   Vrai ou Faux? : $\dfrac{z_M - z_\text{C}}{z_\text{A} - z_\text{B}}$ est imaginaire pur.
3. A est le point de $\mathscr{P}$ d'affixe $z_\text{A} = 1$.
   M désignant un point de $\mathscr{P}$, distinct de O et de A, on note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle OAM.
   Vrai ou Faux? Il existe deux valeurs réelles k et θ telles que : $z_\text{H} = kz_M$ et $z_\text{H} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{e}^{\text{i}\theta}$.

12e QUESTION

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On note A le point de $\mathscr{P}$ d'affixe $z_\text{A} = 1$.
À tout point M de $\mathscr{P}$, d'affixe z distincte de 1, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\text{i}z}{z-1}.$$

1. **Vrai ou Faux?** Si z est un imaginaire pur, z' est l'affixe d'un point de la droite d'équation $y = x$.
2. **Vrai ou Faux?** Si M est un point de la médiatrice du segment [OA], M' est un point d'un cercle de centre O.
3. **Vrai ou Faux?** $z' = \overline{z'} \iff 2|z|^2 = z + \overline{z}$ et M' est un point de l'axe $\left(\text{O},\,\vec{u}\right)$ si et seulement si M est un point du cercle de diamètre [OA] privé du point A.

13^{e} QUESTION

1. Une unité de longueur ayant été choisie, ABCD désigne un rectangle tel que : AB = 3 et AD = 2.
   On note respectivement H et K les projetés orthogonaux des points B et D sur la droite (AC).
   Vrai ou Faux? $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HK}$ et HK $= \dfrac{5}{\sqrt{13}}$.
2. A et B désignent deux points distincts du plan.
   Vrai ou Faux? L'ensemble des points M du plan tels que :
   $$\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=0$$
   est la médiatrice du segment [AB].
3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
   Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $6x+8y=121$.
   Vrai ou Faux? Une équation du cercle C de centre $\Omega(1\,;\,2)$ tangent à $\mathscr{D}$ est :
   $$(x-1)^2+(y-2)^2=100.$$

14^{e} QUESTION

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

1. $\mathscr{D}_1$ désigne la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1-t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.
   $\mathscr{D}_2$ désigne la droite passant par les points de coordonnées $(0\,;\,-2\,;\,0)$ et $(1\,;\,-3\,;\,-2)$.
   Vrai ou Faux? Il existe un point A de $\mathscr{D}_1$ et un point B de $\mathscr{D}_2$ tels que le point I(1 ; 2 ; 3) soit le milieu du segment [AB].
2. Soit le point A(1 ; 1 ; 1) et $\mathscr{D}$ la droite définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} 2x-y+z &=& 1\\ x+2y &=& -1\end{array}\right.$.
   Le point A n'appartient pas à $\mathscr{D}$.
   Vrai ou Faux? Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ contenant A et $\mathscr{D}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}7\\-1\\3\end{pmatrix}$.
3. On considère les points A (3 ; 0 ; 4) et B(0 ; -4 ; 3).
   Les points A et B sont sur une même sphère S de centre O.
   L'intersection de S et du plan (OAB) est un cercle $\mathscr{C}$ de centre O (passant par A et B).
   Vrai ou Faux? Une valeur approchée à 10^{-1} près de la longueur du plus petit des deux arcs du cercle C joignant A à B est 5,4.

15^{e} QUESTION

La variable aléatoire X mesurant la durée de vie (en semaines) d'un certain composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,004$.
Ce composant intervient dans un système destiné à la transmission d'un signal.

1. **Vrai ou Faux?** La moitié au moins des composants de ce modèle a une durée de vie inférieure à la durée de vie moyenne.

2. Un composant est toujours fonctionnel 300 semaines après sa mise en service.

   Vrai ou Faux? Il serait judicieux de le remplacer par un neuf afin d'assurer le fonctionnement du système au cours des n semaines suivantes.

3. Afin de gagner en fiabilité, on décide de monter en parallèle deux composants de ce modèle ; le signal peut être transmis tant que l'un des deux composants est en état de marche.

   Les durées de vie de ces deux composants sont supposées indépendantes.

   Vrai ou Faux? La probabilité que la transmission du signal cesse avant la date t ($t \geqslant 0$ exprimée en semaines) est désormais égale à $\left(1-\mathrm{e}^{-0,004t}\right)^2$.

16^e^ QUESTION

Un laboratoire pharmaceutique fabrique en très grande quantité, un nouveau comprimé médicamenteux. Il est équipé de deux chaînes de production, C_A et C_B.
Un comprimé est déclaré conforme lorsque la masse de principe actif qu'il contient est comprise entre 880 mg et 920 mg.

1. La machine A assurant sur la chaîne de production C_A, le dosage du principe actif, est réglée de sorte que 96 % des comprimés qu'elle produit, soient conformes.

   Au fil du temps, elle est susceptible de se dérégler.

   On prélève donc dans l'ensemble des comprimés produits sur cette chaîne au cours d'une journée, un échantillon de 250 comprimés dont on mesure la masse de principe actif.

   (Cet échantillon aléatoire est assimilé à un tirage successif et avec remise, de 250 comprimés dans l'ensemble des comprimés produits sur cette chaîne au cours de la journée).

   Aujourd'hui, ce sont 14 comprimés qui ont été déclarés non conformes.

   Vrai ou Faux? Au seuil de risque de 5 %, on peut néanmoins considérer que la machine est correctement réglée.

2. Le laboratoire produit 94,2 % de comprimés conformes.

   C_A assure 40 % de la production totale et 96 % des comprimés qu'elle produit sont conformes.

   Vrai ou Faux? La probabilité qu'un comprimé conforme ait été produit par la chaîne C_B est égale à 0,558.

3. En vue de leur commercialisation, ces comprimés sont conditionnés par lot de 10.

   (Un tel lot est assimilé à un tirage successif et avec remise, de 10 comprimés dans l'ensemble des comprimés produits par le laboratoire).

   La probabilité qu'un comprimé soit conforme est égale à 0,942.

   Vrai ou Faux? La probabilité d'obtenir au plus deux comprimés non conformes excède 0,98.