CONCOURS POUR L'ADMISSION EN FORMATION DES INGÉNIEURS DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE MARITIME
ANNÉE 2013

Durée : 2 heures

Tout document est *interdit*. L'usage d'une calculatrice électronique à fonctionnement autonome, non programmable, non programmée, non imprimante, avec entrée unique par clavier est seul autorisé.

Délits de fraude : « tout candidat pris en flagrant délit de fraude ou convaincu de tentative de fraude sera immédiatement exclu de la salle d'examen (sa note sera égale à zéro) sans préjudice de l'application des sanctions prévues par les lois et règlements en vigueur réprimant les fraudes dans les examens et concours publics ».

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.
L'épreuve est constituée de 12 exercices indépendantes. Vous devez en traiter 9 au choix, sur les 12 proposés.
Chaque question vous propose 3 affirmations.
Pour chacune d'elles, vous devez indiquer si elle est vraie ou fausse.
Aucune justification n'est demandée.
Vous avez le droit de vous abstenir de répondre à certaines affirmations.
Le barème sera le suivant :

- $+1$ pour toute réponse correcte, -1 pour toute réponse incorrecte, 0 en l'absence de réponse.
- Une bonification d'un point sera attribuée à toute question ayant été intégralement traitée de façon correcte.

Le total des points que vous obtiendrez à cette épreuve (bonifications comprises) sera sur 36 (12 questions comportant 3 affirmations créditées chacune d'un point) ; il sera ramené sur 20 et arrondi au quart de point immédiatement supérieur afin d'obtenir une note sur 20.
Si ce total excède 36 (suite à des bonifications), la note attribuée sera 20.
Si ce total est strictement négatif, la note attribuée sera 0.

Ainsi le tableau ci-contre signifie que pour la question n° 0,

- vous estimez que la première affirmation est vraie et que la deuxième est fausse,
- vous ne souhaitez pas vous prononcer sur la troisième.

Si les deux réponses fournies sont correctes, vous obtiendrez $+1+1=2$ points sur cette question.
Si une seule des deux réponses fournies est correcte, vous obtiendrez $+1-1=0$ point sur cette question.
Si aucune des deux réponses fournies n'est correcte, vous obtiendrez $-1-1=-2$ points sur cette question.
Un candidat ayant répondu de façon correcte aux trois affirmations, obtiendra 4 points sur cette question.

QUESTION n° 0

	Vrai	Faux
Affirmation 1	X	
Affirmation 2		X
Affirmation 3		

Exercice n° 1

1. f désigne la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right).$$

Vrai ou Faux? $f'(x) + f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2. On admet que pour tout réel $u \geqslant 0$, $\ln(1+u) \geqslant \dfrac{u}{1+u}$.

Vrai ou Faux? Grâce à cette inégalité, il est possible de préciser le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. g désigne une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$g'(x) + g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vrai ou Faux? $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} g(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2) + g(0) - g(ln(3))$.

Exercice n° 2

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} - x.$$

1. À la question « déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0 x>0} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ », un élève a tenu le raisonnement suivant :

Posant $X = \dfrac{1}{x}$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X}$. Puisque $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

Vrai ou Faux? Ce raisonnement est incorrect.

2. On admet que g est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

On note f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}.$$

Vrai ou Faux? Pour tout $x > 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x$.

3. Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2\\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

Vrai ou Faux? Si $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x$ pour tout réel $x > 0$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) est une suite convergente.

Exercice n° 3

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignant une suite numérique telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on considère la suite numérique (v_n) définie par :

$$v_n = u_n - u_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. **Vrai ou Faux?** $u_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$.
2. **Vrai ou Faux?** Si (v_n) est une suite géométrique de raison $q \in]-1\ ;\ 1[$, alors (u_n) est une suite convergente.
3. (u_n) désigne désormais la suite numérique définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & au_{n+1} + (1-a)u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

où a est une constante réelle comprise dans l'intervalle $]0\,;1[$.

Vrai ou Faux? (v_n) est une suite géométrique convergente.

Exercice n° 4

Pour tout entier naturel n, on note 11 1 1

1. **Vrai ou Faux?** Io = V :1+X"2dx = [ln (x + VI + x2)lo = ln (1 + v'2). o 1 + x2
2. **Vrai ou Faux?** (In) est une suite croissante.
3. **Vrai ou Faux?** (In) est une suite convergente.

Exercice n° 5

f désigne une fonction numérique définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire, dont le tableau des variations sur $[0\ ;\ +\infty[$ est le suivant :

x	0		3		$+\infty$
f			2		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				1

On note F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **Vrai ou Faux?** F est une fonction croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. **Vrai ou Faux?** $F(1) = F(-1)$.
3. **Vrai ou Faux?** $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

Exercice n° 6

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

θ désignant un élément de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, on note z_θ le nombre complexe défini par :

$$z_\theta = 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}.$$

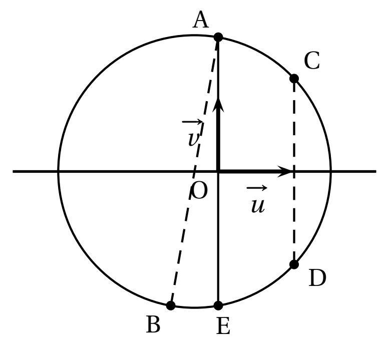
1. **Vrai ou Faux?** Une écriture exponentielle de z_θ est $z_\theta = 2\cos(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
2. **Vrai ou Faux?** $\left(z_{\frac{\pi}{6}}\right)^{2013}$ est un nombre réel.

3. **Vrai ou Faux?** $z_\theta = \dfrac{4}{\overline{z_\theta}}$ si et seulement si $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice n° 7

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On considère la configuration ci-contre dans laquelle :
- A, B, C, D, E sont cinq points distincts du cercle de diamètre [AB], A et E étant situés sur l'axe (0, il), • le milieu du segment [AB] est situé sur l'axe (0, u),
- (CD) est parallèle à l'axe (0, il).

On note $z_\text{A},\ z_\text{B},\ z_\text{C},\ z_\text{D},\ z_\text{E}$ les affixes respectives de ces cinq points.



1. **Vrai ou Faux?** $z_\text{A} + z_\text{B} = 0$.
2. **Vrai ou Faux?** $\dfrac{z_\text{B} - z_\text{C}}{z_\text{A} - z_\text{C}} = k\text{i}$ avec k constante réelle non nulle.
3. **Vrai ou Faux?** $z_\text{C} - z_\text{E} = \overline{z_\text{D}} - \overline{z_\text{A}}$.

Exercice n° 8

Une unité de longueur ayant été choisie, ABCDEFGH désigne un cube dont l'arête mesure une unité.

1. **Vrai ou Faux?** $\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{AG}}$.
2. **Vrai ou Faux?** La droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE).
3. Soit I le point défini par l'égalité vectorielle :

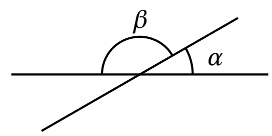
$$\overrightarrow{\text{AI}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}}\right).$$

Vrai ou Faux? I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE).

Exercice n° 9

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

1. $\mathscr{D}_1$ désigne la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2\\ y &=& 2+t\\ z &=& -4-t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. **Vrai ou Faux?** $\mathscr{D}_1$ est la droite passant par le point de coordonnées $(2\,;\,-2\,;\,0)$ et dont un vecteur directeur cet le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.
2. $\mathscr{D}_2$ désigne la droite définie par l'intersection des plans d'équations $x+y+z=0$ et $x-z=1$.
$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ désignent respectivement des vecteurs directeurs de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
Vrai ou Faux? Pour démontrer que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont deux droites sécantes, il suffit de vérifier que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs non colinéaires.
3. Deux droites sécantes (non perpendiculaires) définissent un angle géométrique aigu α et un angle géométrique obtus β.



Vrai ou Faux? Une mesure (en rad) de l'angle géométrique aigu fait par les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice n° 10

Le temps d'attente en minutes à l'un quelconque des comptoirs d'enregistrement d'un aéroport, peut être modélisé par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.

1. **Vrai ou Faux?** Le temps moyen d'attente à l'un de ces comptoirs s'élève à 25 minutes.
2. Un client a déjà attendu 20 minutes à un comptoir.

   Vrai ou Faux? La probabilité qu'il soit reçu dans les 5 minutes suivantes n'excède pas 0,2.
3. Huit comptoirs sont ouverts et le temps d'attente à un comptoir est indépendant du temps d'attente aux autres.

   Des comptoirs supplémentaires sont ouverts lorsque la durée d'attente à au moins cinq des huit comptoirs est supérieure à 20 minutes.

   Vrai ou Faux? Une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité que de nouveaux comptoirs soient ouverts est 0,26.

Exercice n° 11

À la veille d'une élection locale, deux candidats, A et B, sont en présence.
À l'approche de cette élection, un sondage est réalisé sur un échantillon de 400 électeurs choisis au hasard dans la circonscription considérée.
(L'effectif de la population constituée des électeurs de cette circonscription est supposé suffisamment grand pour que le « prélèvement » de cet échantillon puisse être assimilé à un tirage successif et avec remise de 400 individus dans cette population).

1. Lors de la précédente consultation électorale, le candidat A avait obtenu 51 % des suffrages exprimés.

   Le sondage qui vient d'être réalisé, le crédite de 190 intentions de vote.

   Vrai ou Faux? Au seuil de 95 %, sa cote de popularité est restée stable.
2. Le candidat B qui se présente pour la première fois à cette élection, est quant à lui crédité de 208 intentions de vote.

   Vrai ou Faux? Au niveau de confiance de 95 %, le candidat B a raison de penser que si les élections s'étaient déroulées à la date de ce sondage, il aurait certainement été élu.
3. p désigne la proportion d'électeurs qui vont effectivement voter pour B.

   Vrai ou Faux? Au niveau de confiance de 95 %, il aurait fallu réaliser ce sondage sur un échantillon d'effectif au minimum supérieur à 1 600 pour obtenir une estimation de p à 5 % près.

Exercice n° 12

L'épreuve de mathématiques du concours de recrutement d'une école prestigieuse consiste à choisir 3 affirmations parmi 5 proposées, puis à répondre par « Vrai », « Faux » ou « Je ne sais pas » à ces trois affirmations.

Les candidats complètent alors le document réponse ci-dessous :

Affirmation n$^{\text{o}}$	Vrai	Faux	Je ne sais pas
…			
…			
…			

Le barème est le suivant : + 1 pour toute réponse correcte, -1 pour toute réponse incorrecte, 0 pour la réponse « Je ne sais pas ».
On additionne ensuite les points obtenus pour obtenir une note sur 3, une note négative étant possible.
Un candidat (imaginaire bien sûr) n'ayant aucune connaissance en mathématiques, décide de compléter son document réponse en remplissant la colonne « Affirmation n$^{\text{o}}$ » par trois nombres choisis au hasard parmi 1, 2, 3, 4, 5, puis en cochant au hasard sur chaque ligne, l'une des cases « Vrai », « Faux »ou « Je ne sais pas ».

1. **Vrai ou Faux ?** Sans tenir compte de l'ordre, il y a dix façons de compléter la colonne de gauche (Affirmation n$^{\text{o}}$) du tableau précédent.
2. **Vrai ou Faux ?** Ce candidat a plus d'une chance sur deux d'avoir une note supérieure ou égale à 1 sur 3.
3. **Vrai ou Faux ?** En terme d'espérance, il est plus avantageux pour lui, de choisir de ne cocher que les cases « Vrai » ou « Faux » pour les trois affirmations, que de cocher la case « Je ne sais pas » pour l'une des trois affirmations (et « Vrai » ou « Faux » pour les deux autres).