# Une petite historique du nombre d'or

## Son nom

On le désigne par la lettre grecque Ψ( phi ) en hommage au sculpteur grec Phidias (né vers 490 et mort vers 430 avant J.C) qui décora le Parthénon à Athènes. C'est Théodore Cook qui introduisit cette notation en 1914.

## L' histoire ...

**Il y a 10 000 ans** : Première manifestation humaine de la connaissance du nombre d'or (temple d'Andros découvert sous la mer des Bahamas).

**2800 av JC** : La pyramide de Khéops a des dimensions qui mettent en évidence l'importance que son architecte attachait au nombre d'or.

**Vè siècle avant J-C. (447-432 av.JC) :** Le sculpteur grec Phidias utilise le nombre d'or pour décorer le Parthénon à Athènes, en particulier pour sculpter la statue d'*Athéna Parthénos* . Il utilise également la racine carrée de 5 comme rapport.

**IIIè siècle avant J-C. :** Euclide évoque le partage d'un segment en "extrême et moyenne raison" dans le livre VI des *Eléments*.

**1498 :** Fra Luca Pacioli, un moine professeur de mathématiques, écrit *De divina proportione* ("La divine proportion").

**Au XIXème siècle :** Adolf Zeising (1810-1876), docteur en philosophie et professeur à Leipzig puis Munich, parle de "section d'or" (*der goldene Schnitt)* et s'y intéresse non plus à propos de géométrie mais en ce qui concerne l'esthétique et l'architecture. Il cherche ce rapport, et le trouve (on trouve facilement ce qu'on cherche ...) dans beaucoup de monuments classiques. C'est lui qui introduit le côté mythique et mystique du nombre d'or.

**Au début du XXème siècle :** Matila Ghyka, diplomate roumain, s'appuie sur les travaux du philosophe allemand Zeising et du physicien allemand Gustav Theodor Fechner ; ses ouvrages *L'esthétique des proportions dans la nature et dans les arts* (1927) et *Le Nombre d'or. Rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale* (1931) insistent sur la prééminence du nombre d'or et établissent définitivement le mythe .

**Au cours du XXème siècle :** des peintres tels Dali et Picasso, ainsi que des architectes comme Le Corbusier, eurent recours au nombre d'or.

**1945 :** Le Corbusier fait bréveter son *Modulor* qui donne un système de proportions entre les différentes parties du corps humain.

***La pyramide***
**de Khéops**

***Le Parthénon***
**d'Athènes**

***L'amour vache***
**Géricault**

***Le Modulor***
**Le Corbusier**

## Où rencontre-t-on le nombre d'or

### Il paraît que ...

- Le rapport de la hauteur de la pyramide de Khéops par sa demi-base est le nombre d'or.

Il semble que ceci soit vrai, en dehors de toute considération ésotérique.
D'après Hérodote, des prêtres égyptiens disaient que les dimensions de la grande pyramide avaient été choisies telles que : *"Le carré construit sur la hauteur verticale égalait exactement la surface de chacune des faces triangulaires"*

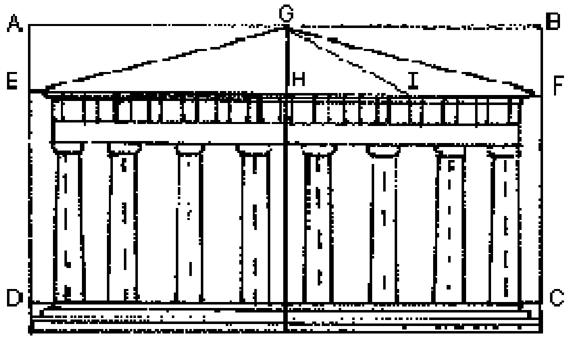
- Le Parthénon d'Athènes fait apparaître un peu partout le nombre d'or .

Certains se sont employés à le chercher et l'ont bien sûr trouvé ! Et s'il avait cherché 2, l'auraient-ils trouvé ??

Le Parthénon s'inscrit dans un rectangle doré, c'est-à-dire tel que le rapport de la longueur à la hauteur était égal au nombre d'or.
Sur la figure : DC/DE = $\varphi$.

Sur la toiture du temple, GF/GI = $\Psi$

Le rectangle GBFH est appelé rectangle Parthénon.



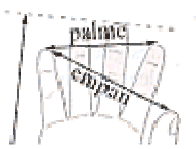

- Si on demande à des personnes de dessiner un rectangle quelconque, le format des rectangles sera (dans 75% des cas selon le physiologiste et philosophe allemand Gustav Fechner, en 1876) proche du nombre d'or. Peut-être le rectangle quelconque est-il le rectangle d'or ?

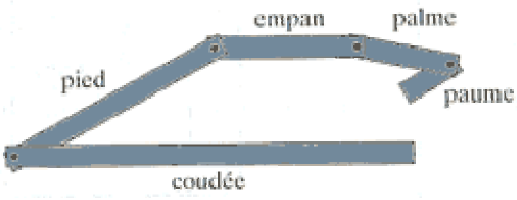
- Si, en vous mesurant, les rapports *"hauteur totale / distance sol-nombril"*et *"distance sol-nombril / distance nombril-sommet du crâne"* sont égaux (environ 1,6), vous êtes bien proportionnés ... D'après Zeising, l'homme à la section d'or !

*D'après un croquis de Léonard De Vinci, Groquik semblait être bien proportionné ... Alors, pourquoi a-t-il été remplacé par le chétif lapin Quicky ?*

## Les bâtisseurs de cathédrales

Au moyen âge, les bâtisseurs de cathédrales utilisaient une pige constituées de cinq tiges articulées, correspondant chacunes à une unité de mesure de l'époque, relatives au corps humain : la paume, la palme, l'empan, le pied et la coudée.






Les longueurs étaient donnée en lignes, une ligne mesurant environ 2 mm (précisément 2,247 mm) :

| | | |
|---|---|---|
| paume | 34 lignes | 7,64 cm |
| palme | 55 lignes | 12,63 cm |
| empan | 89 lignes | 20 cm |
| pied | 144 lignes | 32,36 cm |
| coudée | 233 lignes | 52,36 cm |

Pour passer d'une mesure à la suivante, on peut constater que l'on **multiplie par le nombre d'or** , environ 1,618.

*D'après livre de maths de 3ème, collection cinq sur cinq, Hachette*

## Fra Luca Pacioli en peinture

Ce tableau, de **Jicopo de Barbari**, où Fra Luca Pacioli explique un théorème, fait apparaitre le partage " en extrème et moyenne raison " (la " divine proportion ").
On y retrouve en effet, le nombre d'or : Si E est la projection orthogonale sur (D C) de l'extrémité de l'index de la main gauche du moine on a : DC / DE = $\Psi$.
Par ailleurs, le pouce et l'index gauches de Fra Luca Pacioli partage la hauteur du livre selon la section dorée.
Fra Luca Pacioli : moine franciscain et mathématicien (1445 - 1517 Rome) . Il a écrit en 1498 le livre *De Divina Proportione*, consacré au nombre d'or, ses propriétés mathématiques, ses attributs esthétiques et même certains aspects mystiques .

## Définition et valeur du nombre d'or

Le nombre d'or est la solution positive de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$ , c'est-à dire le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Les 100 premières décimales du nombre d'or sont :
1,618 033 988 749 894 848 204 586 834 365 638 117 720 309 179 805 762 862 135 448 622 705 260 462 189 024 497 07

Le record de calcul des décimales date de 1998 et a été réalisé par Simon Plouffe : 10 000 000 décimales (29 minutes de calcul).

## Section d'or

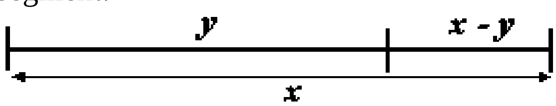
La dénomination *section d'or* ou *section dorée* est tardive et est dûe à l'Allemand Zeising, au mileu du XIXème siècle (il dit *"Der goldene Schnitt"*).
La plus ancienne définition, et construction géométrique, de la section d'or remonte au IIIème siècle avant JC et est dûe au mathématicien grec Euclide, dans son ouvrage *Les Eléments* :

*Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison quand,*
*comme elle est toute entière relativement au plus grand segment,*
*ainsi est le plus grand relativement au plus petit.*
Euclide, *Eléments*, livre VI, 3ème définition.

### Le partage en "extrême et moyenne raison" d'un segment

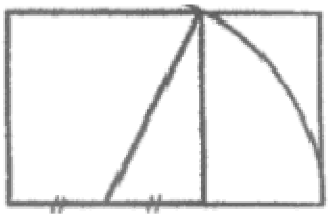
D'après **Euclide**,
dans le livre VI des *Eléments*

Un segment est partagé suivant la section d'or ou la proportion divine si les rapport *x / y* et *y / (x - y)* sont égaux, ce qui signifie que le petit et le moyen segment sont dans le même rapport que le moyen et le grand segment.



De l'équation $\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$, on obtient l'équation $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0$ dont la solution est $\frac{x}{y} = \boldsymbol{\varphi}$

## Rectangle d'or



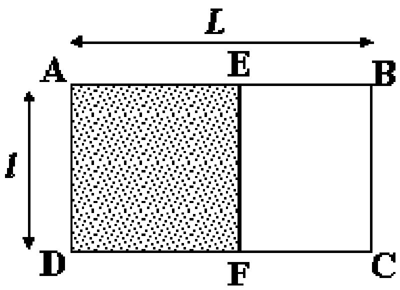
### Format d'un rectangle

Le format d'un rectangle est le quotient $\dfrac{\textbf{Longueur}}{\textbf{largeur}} = \dfrac{L}{\ell}$

*Exemple* : Le format d'une feuille de papier classique ( A3, A4, A5) est $\sqrt{2}$

*Explication :* les dimensions d'une feuille de format A4 ont été choisies de manière qu'en la coupant en deux, on obtienne une feuille (un rectangle ) de même format.
Si on note L la longueur d'une feuille de papier A4 et *l* sa largeur, le format d'une feuille A4 est L / *l*.
La longueur d'une feuille de papier A5 est *l* et sa largeur est L/2. Le format d'une feuille A5 est donc *l* / (L/2) soit 2*l* / L.
On veut que les deux feuilles aient le même format, soit $L / l = 2l / L$ d'où $L^2 = 2\,l^2$ d'où $L / l = \sqrt{2}$

### Rectangle d'or

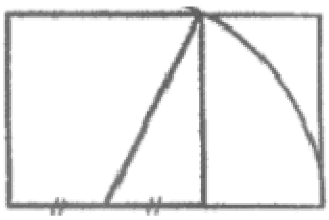



Le rectangle BCFE est obtenu en retirant le plus grand carré possible du rectangle ABCD.

ABCD et BCFE ont le même format si $\dfrac{L}{l} = \varphi$

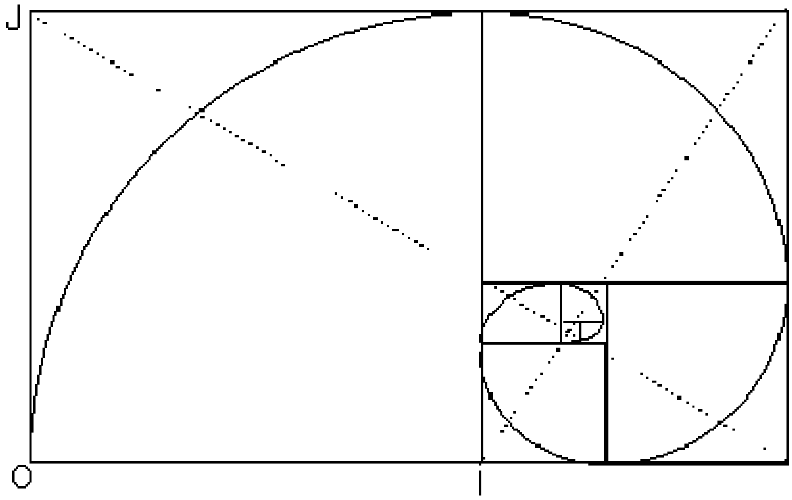
*Explication :* remplacer *x* par *L* et *y* par *l* dans la section dorée d'un segment.

## Construction géométrique du nombre d'or



Ce dessin montre comment, à partir d'un carré de côté 1, on construit un rectangle (d'or) de longueur le nombre d'or.

## Spirale d'or




*La figure est construite à partir d'un grand rectangle d'or.*
*On retire le grand carré au grand rectangle d'or et on obtient un petit rectangle d'or.*
*Ensuite, on retire le petit carré au petit rectangle d'or et on obtient un rectangle d'or plus petit.*
*On réitère l'opération indéfiniment. Elle ne s'arrête pas car la longueur et la largeur d'un rectangle d'or sont incommensurables (on ne peut pas mesurer l'un en prenant l'autre pour unité).*

La spirale obtenue est une spirale équiangulaire qui se rencontre beaucoup dans la nature : tournesols, pommes de pins, coquillages, disposition des feuilles ou des pétales sur certaines plantes.

Les diagonales des rectangles se coupent au même point C qui est le point limite de la spirale.

Dans le repère (O, I, J), C( $\frac{2\varphi+1}{\varphi+2}$ ; $\frac{1}{\varphi+2}$ ) ou bien aussi C ( $\frac{\varphi}{3-\varphi}$ ; $\frac{2-\varphi}{3-\varphi}$).

La spirale est invariante par la similitude de centre C, de rapport $\frac{1}{\varphi}$ ( = $\varphi$- 1) et d'angle -π / 2.

# Suite de Fibonacci

## Définition

Les nombres de Fibonacci forment une *suite* de nombres que l'on appelle *suite de Fibonacci*.
Un nombre de la suite s'obtient en ajoutant les deux nombres précédents de la suite :

si on note $F_n$ le $n^{ème}$ nombre de Fibonacci, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Voila les premiers nombres de la suite : $F_1 = 1$ ; $F_2 = 1$ ; $F_3 = 2$ ; $F_4 = 3$ ; ...etc

| indice *n* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | ... | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | ... | ... |

*Le nom de suite de Fibonacci a été donné par l'arithméticien français Edouard Lucas en 1817, alors qu'il étudiait ce qu'on appelle aujourd'hui les "suites de Fibonacci généralisées" obtenues en changeant les deux premiers termes de la suite de Fibonacci et qui suivent le même procédé de construction.*
*La plus simple d'entre elles, dont les deux premiers termes sont 1 et 3, s'appelle aujourd'hui ... la suite de ... Lucas ! (Elle commence par 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...). Les suites de Fibonacci et de Lucas sont très liées.*

## Quotient de deux nombres successifs de Fibonacci

Si on calcule les valeurs des quotients $\frac{F_2}{F_1}$ ; $\frac{F_3}{F_2}$ ; $\frac{F_4}{F_3}$ ; ... ; $\frac{F_{10}}{F_9}$ ; ... c'est-à-dire les quotients $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ , on remarque que l'on obtient des nombres de plus en plus proches les uns des autres (sans jamais être égaux !) et se rapprochent du nombre d'or.

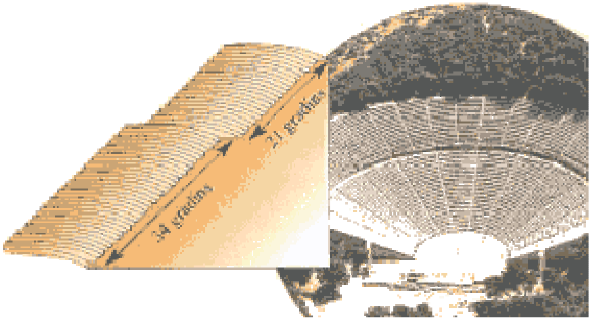
On peut démontrer que la suite des quotients $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ a pour limite le nombre d'or lorsque n tend vers l'infini
En effet, la suite de Fibonacci définie par $F_1 = 1$ ; $F_2 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n > 2$, est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Si on pose $F_n = a * q^n$ , avec q>0 at a non-nul, et que l'on reporte dans dans l'égalité $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , on obtient $a*q^n = a*q^{n-1} + a*q^{n-2}$ soit $q^2 = q + 1$ en simplifiant par $a*q^{n-2}$

et q est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ , c'est-à dire le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

<u>Une petite remarque</u> *: ceci ne dépend pas des premiers termes $F_1$ et $F_2$ de la suite.*

**Le théâtre d'Epidaure**

Dans le théâtre d'Epidaure, construit en Grèce à la fin du IVème siècle avant JC, on a cherché à éviter la monotonie en répartissant les gradins en deux blocs.
Il y a 55 gradins répartis en 34 et 21.
Ce sont trois nombres successifs de la suite de Fibonacci et les rapports 34/21 et (34+21)/34 sont très proches du nombres d'or.
Les gradins sont partagés en "extrême et moyenne raison" .




## Calcul général du nombre de Fibonacci de rang *n*

On a la formule suivante qui donne directement le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fibonacci sans connaître les précédents.
On y voit clairement apparaître le nombre d'or.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

*Remarque : le terme* $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *est plus petit que 1 donc la partie* $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ *de la formule tend vers zéro quand n devient grand.*
*Par conséquent, pour connaître* $F_n$ *quand n est grand, il suffit de prendre la partie entière de*
$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

## Qui était Fibonacci ?

Fibonacci est né à Pise en 1175. Son vrai nom est Léonardo Pisano, ou Léonard de Pise.
Fibonacci est un surnom qui vient de *filius Bonacci* qui veut dire *fils de Bonacci*.
(Bonacci signifie *chanceux* , *de bonne fortune*)

Bonacci est l'un des plus grands mathématiciens du moyen-âge.
C'est lui qui a introduit la numération décimale et l'écriture arabe des chiffres en Occident, en ramenant dans son livre *Liber*

## Quelques résultats mathématiques sur les nombres de Fibonacci et de Lucas

On note $(F_n)$ la suite de Fibonnacci définie par $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ; $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$ .
On note $(L_n)$ la suite de Lucas définie par $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ ; $L_0 = 1$ et $L_1 = 3$ .
On note $(G_n)$ une suite de Fibonnacci "généralisée" définie par $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ sans préciser les valeurs de $G_0$ et $G_1$ .

Voici quelques résultats intéressants.

1. $F_n^2 = F_{n-1} F_{n-2} + e$ , où e = 1 ou -1
2. $G_n^2 = G_{n-1} G_{n-2} + e (G_2^2 - G_1^2 - G_1G_2)$ , où e = 1 ou -1
3. $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$
4. $F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 = F_n F_{n+3}$
5. $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$
6. $F_nL_n = F_{2n}$
7. Pour tout entier n, il existe une infinité de nombre de Fibonacci divisibles par n.
8. Pour tout entier n, il existe un nombre de Fibonacci divisible par n, parmi les 2n premiers termes de la suite.
9. Pour tout entier n différent de 3, si $F_n$ est un nombre premier alors n est un nombre premier.
   La réciproque est fausse ! $F_{19}$ = 4181 = 37 x 113 est le plus petit contre-exemple.
   On ne sait pas s'il existe une infinité de nombres premiers parmi les nombres de Fibonacci.
10. Pour tout entier n différent de 3, si n n'est pas un nombre premier alors $F_n$ n'est pas un nombre premier.
    (Formulation contraposée de la proposition précédente)
11. $F_{12}$ = 144 est la seul carré parfait de la suite de Fibonacci ( à part les triviaux $F_0$ = 1 et $F_1$ = 1)
12. $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$
13. si m divise n alors $F_m$ divise $F_n$
14. PGCD ( $F_n$ ; $F_{n+1}$ ) = 1 pour tout n
15. PGCD ( $F_m$ ; $F_n$ ) = $F_{PGCD(m\,;\,n)}$

La proposition 15 est fascinante !
Elle affirme que le PGCD de deux nombres de Fibonacci est aussi un nombre de Fibonacci et que, de plus, ce n'est pas n'importe lequel... Le rang du PGCD est le PGCD des rangs.

## Fraction continue

A partir de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ , on peut obtenir $x = 1 + \frac{1}{x}$.
En reportant l'expression de *x* obtenue à la place du *x* au dénominateur, on obtient le développement en fraction continue du nombre d'or. On le note courament [ 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , ... ] sous sa forme normalisée (les dénominateurs ne doivent être que des 1)

Ces fractions s'approchent de plus en plus du nombre d'or :

$1+\frac{1}{1}$ = 2 ; $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}$ = 3/2 ; $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}$ = 5/3 ; $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}$ = 8/5 ; $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}$ = 13/8 ...

Que voit-on apparaître ? ... Fibonacci !
Les fractions obtenues sont les rapports de nombres de deux Fibonacci successifs
( Il n'y a rien de mystérieux la-dedans. Essayez de calculer plus de fractions et vous trouverez vite un raccourci qui vous expliquera tout.

## Propriétés algébrique du nombre d'or

### Carré du nombre d'or

Pour calculer le carré du nombre d'or, il suffit de lui ajouter 1 : $\varphi^2 = \varphi + 1$

### Inverse du nombre d'or

Pour calculer l'inverse du nombre d'or, il suffit de lui retrancher 1 : $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$

### Puissances du nombre d'or

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1$$

$$\varphi^4 = 2\varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 2 + \varphi = 3\varphi + 2$$

$$\varphi^5 = 3\varphi^2 + 2\varphi = 3\varphi + 3 + 2\varphi = 5\varphi + 3$$

$$\varphi^6 = 8\varphi + 5$$

$$\varphi^7 = 13\varphi + 8$$

Que voit-on encore apparaître ?? Eh oui ! Fibonacci !
Les puissances du nombre d'or s'expriment en fonction de phi et de 1 et les coefficients ne sont autres que les nombres de Fibonacci.

Pour obtenir une puissance du nombre d'or, il suffit de connaître les deux puissances précédentes et de les additionner, ce qui est exactement le procédé de construction de la suite de Fibonacci !

## Une formule qui relie pi et le nombre d'or

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\varphi^{-2k-1} + \varphi^{-6k-3}\right) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left((\varphi-1)^{2k+1} + (2\varphi-3)^{2k+1}\right)$$