L'extinction du feu cosmique

Deux histoires pi(g)mentées d'algorithmique

Richard Choulet

Algorithmes et Programmation : Jacques Faisant

richardchoulet@wanadoo.fr
faisant.j@wanadoo.fr

Journées Nationales de Grenoble 2011

APMEP

1. Une lettre et des chiffres

1.1 Le bord d'L

Nombres lettrés

Taille du côté	Largeur du L	Hauteur du L	Épaisseur du L	Point de départ
9	4	5	1	0
OK				

37	36	35	34	33	64	103	150	205
38	11	10	9	32	63	102	149	148
39	12	0	8	31	62	101	100	99
40	13	0	7	30	61	60	59	58
41	14	0	6	29	28	27	26	57
42	15	0	5	4	3	2	25	56
43	16	0	0	0	0	1	24	55
44	17	18	19	20	21	22	23	54
45	46	47	48	49	50	51	52	53

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}
5	29	61	101	149	205	269	341	421	509	605	709	-1	-1	-1

Ce pourrait être un exercice d'Olympiades de première :

Quel est le nombre écrit en 2012 ème place sur la diagonale qui commence par 5 ; 29 ; 61 ; 101 ... ?

Nous vous proposons d'écrire quelques spirales s'enroulant sur le L afin d'analyser votre démarche de remplissage et que celle-ci soit reproductible mécaniquement. Accessoirement vous pouvez répondre à la question initiale.

1.2 L'analyse du programme

Il s'agit d'obtenir un programme dont l'exécution place successivement et correctement les nombres et s'arrête lorsque le tableau carré est plein.

On voit que, le plus souvent et ***pendant des intervalles de temps***, l'écriture des nombres se fera « **droit devant** » dans une certaine direction, mais il y aura évidemment des **changements de direction** à prévoir entre ces intervalles de temps.

Il s'agit donc de réaliser un *automate à nombre fini d'états*, ce dont nous ne donnerons pas le détail ici. *Disons que* :

l'état de l'automate est déterminé par

- la direction en cours
- la place où devra être écrit le prochain nombre
- la valeur de ce nombre

Partant de cet état, l'automate

- ∗ place le nombre dans la case
- ∗ teste la case suivante selon la direction en cours
  - ⋄ si elle est pleine, il se prépare à un virage à droite (changement de future case à remplir et de direction)
  - ⋄ sinon il teste la case à gauche par rapport à la direction en cours
    - ◦ si elle est vide, il se prépare à un virage à gauche (changement de future case à remplir et de direction)
    - ◦ sinon il se prépare à avancer d'une case dans la direction en cours, sans changer cette direction
- ∗ augmente la valeur du nombre à utiliser la prochaine fois
- ∗ si ce nombre a dépassé le nombre des cases à remplir, l'automate s'arrête (sinon, il continue).

Le **JavaScript**, qui est le « langage-cible » de nos algorithmes, permet d'étendre à volonté la taille des tableaux à une seule dimension (leur taille n'a pas à être déterminée à l'avance). C'est pourquoi nous utiliserons un tel tableau pour simuler un tableau de taille carrée.

Nous noterons 1 la direction « vers le haut » (le Nord) , 2 vers la gauche (l'Est), etc jusqu'à 4 dans le sens trigonométrique ; *voici l'algorithme* :

direction := 1 ;

placer les 0 représentant la lettre L dans le tableau (on placera systématiquement −1 dans les cases du tableau restées vides)

lancer l'automate pour la case située à droite de la barre horizontale du L, vers le Nord, avec la valeur 1

imprimer la partie utile du tableau

imprimer la demi-diagonale principale du tableau

2. Dadou run runs

2.1 La théorie

2.1.1 Suite de Hofstadter

Voici légèrement modifiée pour rester dans le cadre, une page extraite de l'On-Line Encyclopedia of Integer Sequences qui définit la suite dite de Hofstadter

A005185 Hofstadter Q-sequence: a(1) = a(2) = 1; a(n)=a(n-a(n-1))+a(n-a(n-2)) for n > 2. (Formerly M0438) 75

1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 9, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 16, 14, 14, 16, 16, 16, 16, 20, 17, 17, 20, 21, 19, 20, 22, 21, 22, 23, 23, 24, 24, 24, 24, 24, 32, 24, 25, 30, 28, 26, 30, 30, 28, 32, 30, 32, 32, 32, 32, 40, 33, 31, 38, 35, 33, 39, 40, 37, 38, 40, 39 (list; graph; listen; history; internal format)

COMMENTS Rate of growth is not known. In fact it is not even known if this sequence is defined for all positive n.

REFERENCES B. W. Conolly, ``Meta-Fibonacci sequences,'' in S. Vajda, editor, Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section. Halstead Press, NY, 1989, pp. 127-138.

Nathaniel D. Emerson, A Family of Meta-Fibonacci Sequences Defined by Variable-Order Recursions, Journal of Integer Sequences, Vol. 9 (2006), Article 06.1.8.

J. Grytczuk, Another variation on Conway's recursive sequence, Discr. Math. 282 (2004), 149-161.

R. K. Guy, Some suspiciously simple sequences, Amer. Math. Monthly 93 (1986), 186-190; 94 (1987), 965; 96 (1989), 905.

R. K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, Sect. E31.

D. R. Hofstadter, Goedel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid, Random House, 1980, p. 138.

N. J. A. Sloane and Simon Plouffe, The Encyclopedia of Integer Sequences, Academic Press, 1995 (includes this sequence).

S. Vajda, Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section, Wiley, 1989, see p. 129.

S. Wolfram, A New Kind of Science, Wolfram Media, 2002; p. 129.

MAPLE
```
a := proc(n) option remember; if n<=2 then 1 else if n > a(n-1) and n > a(n-2) then RETURN(a(n-a(n-1))+a(n-a(n-2))); else ERROR(" died at n= ", n); fi; fi; end;
```

MATHEMATICA
```
a[1] = a[2] = 1; a[n_] := a[n] = a[n - a[n - 1]] + a[n - a[n - 2]]; Table[ a[n], {n, 1, 70} ]
```

PROG
```
(Scheme): (define q (lambda (n) (cond ( (eqv? n 0) 1) ( (eqv? n 1) 1) ( #t (+ (q (- n (q (- n 1)))) (q (- n (q (- n 2)))))))))
(Mupad) q:=proc(n) option remember; begin if n<=2 then 1 else q(n-q(n-1)) +q(n-q(n-2)) end_if; end_proc: q(i)$i=1..100; - Zerinvary Lajos (zerinvarylajos(AT)yahoo.com), Apr 03 2007
(PARI) {a(n)= local(A); if(n<1, 0, A=vector(n, k, 1); for(k=3, n, A[k]= A[k-A[k-1]]+ A[k-A[k-2]]); A[n])} /* Michael Somos Jul 16 2007 */
```

AUTHOR Simon Plouffe, N. J. A. Sloane (njas(AT)research.att.com).

2.1.2 Bricolage personnel

Dans l'idée de fabriquer une suite « à la Hofstadter » mais plus simple dans sa conception, j'ai inventé des suites de la forme :

$$u(n) = u(|[\alpha n - u(n-2)]|).$$

Nous reviendrons un peu plus loin sur ce que sous-tend cette définition (voir Annexe).

2.1.3. Manipulation

Si vous acceptez votre mission, vous prenez $\alpha = 0,5$, $u(0) = 1$ et $u(1) = 2$. Vous calculez une nombre suffisant de termes de la suite u et vous vous intéressez aux deux suites v et w qui comptent les tailles des paquets de 1 et de 2 successifs.

2.1.4. La justification

Démonstration par récurrence forte (ou cumulative) de : la suite u est effectivement définie sur $\mathbb{N}$ tout entier par ce qui précède (§ 2.1.2 et 2.1.3).

Départ : Nous savons que $u(0) = 1$ et $u(1) = 2$. Donc $u_2 = u(|[\frac{2}{2} - u(0)]|) = u(|[1-1]|) = 1$ et $u_3 = u(|[\frac{3}{2} - u(1)]|) = u(|[1,5-2]|) = 2$.

Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 4. Supposons que pour tout entier p compris entre 4 et $n-1$, les nombres u_p sont correctement définis.

Alors $u_n = u(|[0,5n - u(n-2)]|)$. Or, comme $n \geqslant 4$ et $1 \leqslant u(n-2) \leqslant 2$, on a $0,5n - u(n-2) \geqslant 0$, d'où $|[0,5n - u(n-2)]| \leqslant n-1$. Par conséquent, nous pouvons dire que $u(n-2)$ et $u(|[0,5n-u(n-2)]|)$ sont correctement définis, soit d'après le calcul de départ, soit d'après l'hypothèse de récurrence. D'où : $u_n = u(|[0,5n - u(n-2)]|)$ est correctement défini.

Conclusion de la récurrence forte : La suite u est effectivement définie sur $\mathbb{N}$ tout entier.

2.1.5 La résolution pour α = 0,5

2.1.5.1 Les formules

Après divers périgrinations, errements et retours, l'auteur théoricien a inventé et démontré les formules

- v est la suite ainsi définie : $v_0 = v_1 = v_2 = 1$, $v_3 = 2$ et $v_n = 2^{n-2} + 2$ au-delà,
- w est : $w_0 = 1$, $w_1 = 2$, $w_2 = 1$ et $w_n = 7 \times 2^{n-3} - 2$ au-delà.

2.1.5.2 La démonstration pour α = 0,5.

2.1.5.2.1 La méthode : je construis une suite u' à partir de deux suites d'entiers naturels v' et w' strictement positives de la manière suivante : les termes de u' sont, dans l'ordre où je les rencontre : 1 en nombre égal à v'_0 , puis 2 en nombre égal à w'_0, puis 1 à nouveau, égal en nombre à v'_1 puis 2 en nombre égal à w'_1, aso, usw, etc.

Ici, je considère les suites v' et w' :

- v' est la suite ainsi définie : $v'_0 = v'_1 = v'_2 = 1$, $v'_3 = 2$ et $v'_n = 2^{n-2} + 2$ au-delà,
- w' est : $w'_0 = 1$, $w'_1 = 2$, $w'_2 = 1$ et $w'_n = 7 \times 2^{n-3} - 2$ au-delà.

Je vais démontrer que la suite u' ainsi obtenue est la suite proposée u.

2.1.5.2.2 Les frontières :

Pour d'obscures raisons métaphysiques (actuellement), il est bon pour le lecteur de calculer avec zèle, les deux sommes :

- $S_1(N) = \sum_{p=0}^{N} v_p = 2 \times N - 5 + 2^{N-1}$ pour $N \geqslant 3$ et
- $S_2(N) = \sum_{p=0}^{N} w_p = 1 - 2 \times N + 7 \times 2^{N-2}$ pour $N \geqslant 2$.
- Ainsi $S_1(N)+S_2(N) = -4+9\times 2^{N-2}$ et $S_1(N)+S_2(N)+v_{N+1} = -2+11\times 2^{N-2}$ pour $N \geqslant 3$.

(Le lecteur peut maintenant déterminer les indices correspondant aux frontières entre les 1 et les 2, et les 2 et les 1.)

2.1.5.2.3 Raisonnement préliminaire : je démontre que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u'(n) = u'(|[0,5n - u'(n-2)]|)(1)$.

<u>Début à la main</u> : tout d'abord, on montre « à la main » que la relation est satisfaite pour tout naturel n compris entre 2 et 33, et même, bien sûr, aussi loin qu'on le veut (voir la feuille complémentaire).

<u>Raisonnement basé sur les indices frontières obtenus précédemment</u> : soit un entier $n \geqslant 34$.

Cas où $u'_n = 1$. Alors il existe un naturel p supérieur ou égal à 2 et tel que $9 \times 2^p - 4 \leqslant n \leqslant 11 \times 2^p - 3$. J'obtiens :

$9 \times 2^{p-1} - 2 - u'_{n-2} \leqslant \frac{n}{2} - u'_{n-2} \leqslant 11 \times 2^{p-1} - \frac{3}{2} - u'_{n-2}$.

Quelle que soit la valeur de u'_{n-2}, qui est 1 ou 2, il en découle :

$9 \times 2^{p-1} - 4 \leqslant \frac{n}{2} - u'_{n-2} \leqslant 11 \times 2^{p-1} - 2,5$ où $p - 1 \geqslant 1$.

Ceci entraîne que la partie entière de $m = \frac{n}{2} - u'_{n-2}$ est dans l'intervalle

$$[[9 \times 2^{p-1} - 4; 11 \times 2^{p-1} - 3]]$$

donc $u'(|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]|) = u'_n = 1$.

Cas où $u'_n = 2$. Ici il existe un naturel p supérieur ou égal à 2 et tel que

$$11 \times 2^p - 2 \leqslant n \leqslant 9 \times 2^{p+1} - 5.$$

J'obtiens de même :

$\frac{n}{2} - u'_{n-2} \in [[11 \times 2^{p-1} - 1 - u'_{n-2}; 9 \times 2^p - 2,5 - u'_{n-2}]]$ où $p - 1 \geqslant 1$.

S'il se trouve que $u'_{n-2}=1$, cet intervalle est inclus dans $[[11\times 2^{p-1}-2;9\times 2^p-3,5]]$. La partie entière étudiée pourrait donc être $9\times 2^p-4$ et il nous reste ici ce seul cas à éliminer ; si $u'_{n-2}=2$, l'intervalle est inclus dans $[[11\times 2^{p-1}-3;9\times 2^p-5]]$ et il n'est pas exclu ici que la partie entière soit $11\times 2^{p-1}-3$, ce que nous devons également éliminer.

Dire que $u'_{n-2}=1$, c'est dire que $n\in[[9\times 2^k-4+2;11\times 2^k-3+2]]$ où $k\geqslant 1$, avec $n\in[[11\times 2^p-2;9\times 2^{p+1}-5]]$; d'après les bornes de ces deux intervalles, cela implique $p=k$, d'où, d'après deux de ces bornes, $n=11\times 2^p-2$ ou $n=11\times 2^p-1$. Dans chacun des cas, la partie entière de m est $11\times 2^{p-1}-2$ et n'est donc pas $9\times 2^p-4$.

Dire que $u'_{n-2}=2$, c'est dire que $n\in[[11\times 2^k-2+2;9\times 2^{k+1}-5+2]]$ où $k\geqslant 1$, avec $n\in[[11\times 2^p-2;9\times 2^{p+1}-5]]$. Par un raisonnement logarithmique sur les bornes de ces deux intervalles, on voit que cela implique que $k=p$ et qu'en fait $n\in[[11\times 2^p;9\times 2^{p+1}-3]]$.

Donc $\frac{n}{2}-2\in[[11\times 2^{p-1}-2;9\times 2^p-3,5]]$. Ceci prouve que la partie entière de m ne peut être égale à $11\times 2^{p-1}-3$.

Finalement, dans ce second point, j'ai démontré que la partie entière de m est dans l'intervalle $[[11\times 2^{p-1}-2;9\times 2^p-5]]$, ce qui donne donc : $u'(|[\frac{n}{2}-u'_{n-2}]|)=u'_n=2$.

Conclusion : en résumé, pour tout $n\geqslant 2$: $u'_n=u'_{|[\frac{n}{2}-u'_{n-2}]|}$

2.1.5.3 Il en découle la démonstration de : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u'_n=u_n$.

Départ : nous avons déjà vu que $u'_0=1$ et $u'_1=2$.

Rappel : nous avons déjà démontré que les propriétés conjointes

$u(0)=1$, $u(1)=2$ et, pour tout $n\geqslant 2$: $u_n=u_{|[\frac{n}{2}-u_{n-2}]|}$ déterminent une (seule) suite u.

Conclusion : Les suites u et u' sont égales ; CQFD !

2.2 Où intervient le praticien : algorithmes concernant les suites auto-récursives

♣ Calcul des termes de la suite u jusqu'au rang nb

- Paramètres : nb, $alpha$, u
- Variables locales : $rang.depart$, i, $indice$;

```
si alpha = 1/4 alors
        rang.depart := 3
    sinon
        rang.depart := 2
    u[0] := 1
    u[1] := 2
    u[2] := 1
```

pour i variant de $rang.depart$ jusqu'à nb faire
$indice := |[alpha * i - u[i-2]]|$
$u[i] := u[indice]$
si $i < 100$ alors
imprimer i, $u[i]$,
aller à la ligne

♢ Calcul des termes des suites v et w

- Paramètres : nb, $alpha$
- Variables locales : les tableaux à une dimension u, v et w, les variables compteurs i, iv et iw ; enfin, $calcul.de.u$ qui est le nom de la fonction correspondant à l'algorithme précédent.

$calcul.de.u(nb, alpha, u)$ *(**appel** de fonction ; ici, u est un paramètre **par adresse**)*
$i := 0$;
$iv := 0$;
$iw := 0$;
$v[0] := 0$;
$w[0] := 0$;
tant que $i \leqslant nb$ faire
si $u[i] = 1$ alors
tant que $u[i] = 1$ faire
$v[iv] := v[iv] + 1$
$i := i + 1$
imprimer $"i = ", i, "iv = ", iv, "v[iv] = ", v[iv]$
formule.v()
iv := iv + 1 ;
v[iv] := 0
sinon
tant que $u[i] = 2$ faire
$w[iw] := v[iw] + 1$
$i := i + 1$
imprimer $"i = ", i, "iw = ", iw, "w[iw] = ", w[iw]$
formule.w()
iw := iw + 1 ;
w[iw] := 0

♡ Affichage des termes obtenus pour les suites v et w

- Pas de paramètres.

Imprimer "Termes de la suite v"
pour i variant de 0 jusqu'à $iv - 1$ faire
imprimer $v[i]$
aller à la ligne
imprimer "Termes de la suite w"
pour i variant de 0 jusqu'à $iw - 1$ faire
imprimer $w[i]$
aller à la ligne

♠ « Vérification » des formules donnant les termes des suites v et w

- Pas de paramètres

- Nouvelles variables locales pour l'algorithme qui calcule les termes des suites v et w : $pas.de.calc$, $erreurv$, $erreurw$, $valviv$, $valviw$, $formule.v$, $formule.w$

*Lignes à insérer au début de l'algorithme qui calcule les termes des suites v et w :

$erreurv := 0$
$erreurw := 0$
si $alpha \neq \frac{1}{2}$ alors
$pas.de.calc :=$ true
sinon
$pas.de.calc :=$ false

**Vérification de la formule pour les termes de la suite v

si $pas.de.calc$ est faux alors
$valviv := 2^{iv-2} + 2$
imprimer "Val.calc de $v[iv]$", $valviv$
si $valviv \neq v[iv]$ alors
$erreurv := erreurv + 1$
imprimer "ERREUR"

**Vérification de la formule pour les termes de la suite w

si $pas.de.calc$ est faux alors
$valwiw := 7 * 2^{iw-3} - 2$
imprimer "Val.calc de $w[iw]$", $valviw$
si $valwiw \neq w[iw]$ alors
$erreurw := erreurw + 1$
imprimer "ERREUR"

*A insérer à la fin de l'algorithme qui calcule les termes des suites v et w :

imprimer "Nombre d'erreurs pour v : ", $erreurv$, "Nombre d'erreurs pour w : ", $erreurw$
aller à la ligne

3. Annexe

3.1 La généralité

Je construis une suite u à partir de deux suites d'entiers naturels v et w strictement positives de la manière suivante : je donne les entiers a et b. Les termes de u sont dans l'ordre où je les rencontre : a en nombre égal à v_0, puis b en nombre égal à w_0, puis a à nouveau, égal en nombre à v_1 puis b en nombre égal à w_1, aso, usw, etc.

Remarque 1 : tout dépend du fait que l'on veuille ou non une définition minimaliste dans le sens, par exemple, où la récurrence est satisfaite dès le plus petit entier possible : si l'on veut qu'elle soit à l'oeuvre dès $n = 2$, u_2 est inutile (bémol toutefois[1]). Par contre si l'on souhaite ne commencer cette récurrence qu'à un certain entier, il faut fournir, bien sûr, le matériel inaccessible par la formule.

[1] si $\alpha = 1$ et $u(n-2) = 0$, la relation ne permet pas de calculer u_2.

Remarque 2 : les valeurs de départ ne sauraient non plus être n'importe quoi car il faut pouvoir définir la suite sur $\mathbb{N}$. *Par exemple avec* $\alpha = 1$ *et deux valeurs de départ : si l'on donne* $u_0 = a$ *et* $u_1 = b$ *et la récurrence dès 2, on doit avoir* $1 \leqslant a \leqslant 3$ *et* $1 \leqslant b \leqslant 5$ *pour pouvoir poursuivre.*

Remarque 3 : α *ne peut être n'importe quoi dans* $\mathbb{R}$ *!*

En effet, puisque je m'en tiens à la connaissance des trois premiers termes et de la relation de récurrence, je veux que la suite soit définie sur $\mathbb{N}$, *ce qui n'est pas le cas dès que* $\alpha > 1$. *L'idée est que* αn *grossit plus vite que* n, *donc il n'y a pas assez d'information pour définir complétement la suite : il y a trop de trous et de valeurs de* n *qui n'ont pas d'image par* u. *Illustrons cette allégation sur des exemples.*

Je prends $\alpha = 1,5$ *pour que l'on ne croit pas qu'il n'y a que des entiers dans* $\mathbb{R}$.

J'ai $u_3 = u_{[4,5-u_1]} = u_3$ *ce qui en soi n'est pas des plus faux mais n'avance pas la chose !* $u_4 = u_{6-u_3}$, $u_5 = u_{[7,5-u_3]}$, $u_6 = u_{9-u_4}$ *; ici avec l'aménagement de connaître judicieusement* u_3, *la suite est définie sur* $\mathbb{N}$.

Je prends $\alpha = 2$. $u_3 = u_5$, $u_4 = u_5$, $u_5 = u_{10-u_3}$, $\cdots$ *; on ne s'en sort pas aisément.*

3.2 Le cas $\alpha = 1$

Je prends $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ *et* $u_2 = 3$.

La suite est périodique : 0, 1, 3, 3, 1, 3, 3, $\cdots$.

Par récurrence la seule chose sérieuse à voir est l'hérédité. Avec $u_{3p+1} = 1$, $u_{3p+2} = u_{3p+3} = 3$ *jusqu'à* $p = n$, *j'ai :* $u_{3n+4} = u(3n+4-3) = u_{3n+1} = 1$, $u_{3n+5} = u(3n+5-3) = u_{3n+2} = 3$ *et* $u_{3n+6} = u(3n+6-1) = u_{3n+5} = 3$ *d'où le résultat jusqu'à l'ordre* $n+1$. *J'ai calculé explicitement* u_n. *Bien sûr* $u_0 = 0$ *et pour tout* $n \geqslant 1$ *:*

$$u_n = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2\pi}{3}n - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2\pi}{3}n.$$

Je conjecture que lorsque $\alpha = 1$, la suite est périodique.

Illustrons sur des exemples qui ne prétendent pas être une démonstration !

Avec $u_0 = a$ *et* $u_1 = b$, *on a vu que* $1 \leqslant a \leqslant 3$ *et* $1 \leqslant b \leqslant 5$, *ce qui donne donc quinze suites de ce type. L'examen de ces suites est sans appel : elles sont périodiques. La démonstration coule alors de source par récurrence.*

```
p:=1:for m from 1 to 5 do a(0):=p:a(1):=m:for n from 2 to 30 do a(n):=a(abs(floor(n-a(n-2)))):
od:seq(a(n),n=0..30):od;
                              a(0) := 1 a(1) := 1
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
                              a(0) := 1 a(1) := 2
1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
                              a(0) := 1 a(1) := 3
```

```
1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1
                              a(0) := 1 a(1) := 4
1, 4, 4, 4, 1, 4, 4, 4, 1, 4, 4, 4, 1, 4, 4, 4, 1, 4, 4, 4, 1, 4, 4, 4, 1, 4, 4, 4, 1, 4, 4
                              a(0) := 1 a(1) := 5
1, 5, 5, 5, 5, 1, 5, 5, 5, 5, 1, 5, 5, 5, 5, 1, 5, 5, 5, 5, 1, 5, 5, 5, 5, 1, 5, 5, 5, 5, 1

> p:=2:for m from 1 to 5 do a(0):=p:a(1):=m:for n from 2 to 30 do a(n):=a(abs(floor(n-a(n-2)))):
od:seq(a(n),n=0..30):od;
>                             a(0) := 2 a(1) := 1
2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
                              a(0) := 2 a(1) := 2
2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
                              a(0) := 2 a(1) := 3
2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
                              a(0) := 2 a(1) := 4
2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2
                              a(0) := 2 a(1) := 5
2, 5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2

> p:=3:for m from 1 to 5 do a(0):=p:a(1):=m:for n from 2 to 30 do a(n):=a(abs(floor(n-a(n-2)))):
od:seq(a(n),n=0..30):od;
>                             a(0) := 3 a(1) := 1
3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
                              a(0) := 3 a(1) := 2
3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
                              a(0) := 3 a(1) := 3
3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
                              a(0) := 3 a(1) := 4
3, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 4, 4
                              a(0) := 3 a(1) := 5
3, 5, 5, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5, 3
```

Si l'on se donne trois valeurs de départ $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_2 = c$, la relation de récurrence courant dès $n = 3$, on doit avoir de manière similaire à ce qui précède : $1 \leqslant b \leqslant 5$ et $1 \leqslant c \leqslant 7$. Mais on s'aperçoit qu'avec $b = 3$, on est renvoyé sur une condition liée à a qui est : $1 \leqslant a \leqslant 9$: il y a donc ici 63 telles suites. La période d'ailleurs ne se laisse pas facilement prévoir avec les valeurs de départ ; c'est à étudier aussi !

À la lueur (lumière est beaucoup dire) de ces exemples, le cas de $\alpha = 1$ semble assez limpide pour que je n'insiste pas, en disant que j'ai démontré peu de choses. Du moins le problème est-il posé !

Feuilles de calculs complémentaires

I.

Des nombres entourant la lettre **L**

Suites autorégressives

i	$u(i)$	i_v	v_{i_v}	i_w	w_{i_w}
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

i	$u(i)$	i_v	v_{i_v}	i_w	w_{i_w}
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

II.

Comparaison entre $u'(n)$ et $u'(|[0,5n - u'(n-2)]|)$ lorsque $n \in [[2\ ;\ 33]]$.

Si $n = 2$, n - 2 = 0, $u'_0 = 1$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 0$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 0$; $u'_0 = 1$; u'_2 =1.
Si $n = 3$, n - 2 = 1, $u'_1 = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ -0,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 1$; $u'_1 = 2$; u'_3 =2.
Si $n = 4$, n - 2 = 2, $u'_2 = 1$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 1$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 1$ $u'_1 = 2$; u'_4 =2.
Si $n = 5$, n - 2 = 3, $u'_3 = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 0,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 0$; $u'_0 = 1$; u'_5 =1.
Si $n = 6$, n - 2 = 4, $u'_4 = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 1$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 1$; $u'_1 = 2$; u'_6 =2.
Si $n = 7$, n - 2 = 5, $u'_5 = 1$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 2,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 2$; $u'_2 = 1$ u'_7 =1.
Si $n = 8$, n - 2 = 6, $u'_6 = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 2$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 2$; $u'_2 = 1$; u'_8 =1.
Si $n = 9$, n - 2 = 7, $u'_7 = 1$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 3,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 3$; $u'_3 = 2$; u'_9 =2.
Si $n = 10$, n - 2 = 8, $u'_8 = 1$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 4$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 4$; $u'_4 = 2$; u'_{10} =2.
Si $n = 11$, n - 2 = 9, $u'_9 = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 3,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 3$; $u'_3 = 2$ u'_{11} =2.
Si $n = 12$, n - 2 = 10, $u'_{10} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 4$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 4$; $u'_4 = 2$; u'_{12} =2.
Si $n = 13$, n - 2 = 11, $u'_{11} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 4,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 4$; $u'_4 = 2$; u'_{13} =2.
Si $n = 14$, n - 2 = 12, $u'_{12} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 5$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 5$; $u'_5 = 1$; u'_{14} =1.
Si $n = 15$, n - 2 = 13, $u'_{13} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 5,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 5$; $u'_5 = 1$; u'_{15} =1.
Si $n = 16$, n - 2 = 14, $u'_{14} = 1$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 7$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 7$; $u'_7 = 1$; u'_{16} =1.
Si $n = 17$, n - 2 = 15, $u'_{15} = 1$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 7,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 7$; $u'_7 = 1$; u'_{17} =1.
Si $n = 18$, n - 2 = 16, $u'_{16} = 1$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 8$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 8$; $u'_8 = 1$; u'_{18} =1.
Si $n = 19$, n - 2 = 17, $u'_{17} = 1$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 8,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 8$; $u'_8 = 1$; u'_{19} =1.
Si $n = 20$, n - 2 = 18, $u'_{18} = 1$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 9$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 9$; $u'_9 = 2$; u'_{20} =2.
Si $n = 21$, n - 2 = 19, $u'_{19} = 1$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 9,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 9$; $u'_9 = 2$; u'_{21} =2.
Si $n = 22$, n - 2 = 20, $u'_{20} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 9$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 9$; $u'_9 = 2$; u'_{22} =2.
Si $n = 23$, n - 2 = 21, $u'_{21} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 9,5 $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 9$; $u'_9 = 2$; u'_{23} =2.
Si $n = 24$, n - 2 = 22, $u'_{22} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 10$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 10$; $u'_{10} = 2$; u'_{24} =2.
Si $n = 25$, n - 2 = 23, $u'_{23} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 10,5 $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 10$; $u'_{10} = 2$; u'_{25} =2.
Si $n = 26$, n - 2 = 24, $u'_{24} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 11$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 11$; $u'_{11} = 2$; u'_{26} =2.
Si $n = 27$, n - 2 = 25, $u'_{25} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 11,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 11$; $u'_{11} = 2$; u'_{27} =2.
Si $n = 28$, n - 2 = 26, $u'_{26} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 12$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 12$; $u'_{12} = 2$; u'_{28} =2.
Si $n = 29$, n - 2 = 27, $u'_{27} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 12,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 12$; $u'_{12} = 2$; u'_{29} =2.
Si $n = 30$, n - 2 = 28, $u'_{28} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 13$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 13$; $u'_{13} = 2$; u'_{30} =2.
Si $n = 31$, n - 2 = 29, $u'_{29} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 13,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 13$; $u'_{13} = 2$; u'_{31} =2.
Si $n = 32$, n - 2 = 30, $u'_{30} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} = 14$; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 14$; $u'_{14} = 1$; u'_{32} =1.
Si $n = 33$, n - 2 = 31, $u'_{31} = 2$, $\frac{n}{2} - u'_{n-2} =$ 14,5 ; $|[\frac{n}{2} - u'_{n-2}]| = 14$, $u'_{14} = 1$; u'_{33} =1.

L'extincteur du feu cosmique