IREM DE GRENOBLE

Journées Nationales APMEP :
Atelier "géométries non-euclidiennes"

Quatre questions de géométrie ont été proposées aux participants de l'atelier des Jounées Nationales de Grenoble :

1. Quelle est la somme des angles d'un triangle de la sphère de rayon unitaire ? Quelle est l'aire d'un tel triangle ?
2. Le projeté sur un plan d'un angle de l'espace est-il inférieur ou égal à cet angle ? Sinon, est-il égal, ou plus grand ?
3. La projection stéréographique : comment est-elle définie ? que conserve-t-elle ?
4. La projection cylindrique : comment est-elle définie ? que conserve-t-elle ?

Lors des ateliers, ces questions ont été abordées à partir de figures de Géométrie Dynamique en 3D, chargées sur l'ordinateur mis à la disposition de chaque participant, ces figures ayant l'avantage de permettre à chaque participant de se faire sa propre intuition en variant les points de vue et en se plaçant éventuellement dans les situations-limites. Il est difficile de rendre compte de ces expérimentations dans cet article, qui n'est illustré que par des images fixes de ces figures. Le lecteur désirant découvrir ces expérimentations dynamiques pourra les retrouver sur le site www-irem.ujf-grenoble.fr, qui sera complété progressivement.
Dans cet article, nous commenterons principalement les réponses à la deuxième question. Cependant, nous évoquerons auparavant quelques unes des réactions des participants à la première question, car elles nous ont semblé intéressantes [1].

1. Quelle est la somme des angles d'un triangle de la sphère unitaire $\mathbb{S}^2$?

Le théorème qui nous intéresse ici (dont l'énoncé est donné par l'équation (2) à venir) est attribué à Girard ; cependant la démonstration dont nous nous sommes inspirés est celle (plus tardive) des éléments de géométrie de Legendre, qui a l'avantage d'être très "visuelle" et de ne supposer connues ni la trigonométrie classique, ni (a fortiori) la trigonométrie sphérique [2].

Les premières questions ont porté sur la définition d'un triangle sphérique ABC : une fois donnés trois points A, B et C sur la sphère $\mathbb{S}^2$, comment construit-on le triangle de sommets A, B et C ?

– La construction des côtés de ce triangle a été assez facilement admise : ce sont les arcs de grands cercles [3] $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ et $\widehat{AC}$ (cf. figure 1). Dans cette définition, le fait que deux des sommets du triangle, par exemple A et B, puissent être antipodaux a cependant jeté un certain trouble, car il y a alors une infinité d'arcs de grands cercles $\widehat{AB}$ (ou méridiens) [4] ; pour

1. On trouvera sur le même site web de l'IREM de Grenoble un traitement des autres questions, en particulier des démonstrations "élémentaires".

2. Le lecteur intéressé par un approfondissement des sources de ce problème pourra commencer ses recherches sur le site http ://fr.wikipedia.org/wiki/Albert_Girard et en recherchant les articles traitant de la "trigonométrie sphérique", dont les origines remontent à l'Antiquité.

3. Le "grand cercle" passant par A et B est l'intersection du plan passant par A, B et par le centre O de la sphère, les points A et B délimitent alors deux arcs de ce grand cercle, et c'est le plus court de ces deux arcs que nous appellerons $\widehat{AB}$.

4. Ce trouble est une réaction saine : il souligne le fait que la géométrie sphérique ne vérifie pas un des axiomes de la géométrie euclidienne : en effet, dans la mesure où on admet que l'arc de grand cercle $\widehat{AB}$ est le plus court des chemins (tracés sur la sphère) qui joignent les points A et B, les grands cercles sont les "droites" de la géométrie sphérique ; il n'est donc pas vrai que, par deux points antipodaux, passe une seule de ces "droites".

ne pas augmenter la confusion, nous nous sommes restreints (un peu arbitrairement) au cas où il n'y a pas deux sommets antipodaux parmi les trois sommets du triangle [5].

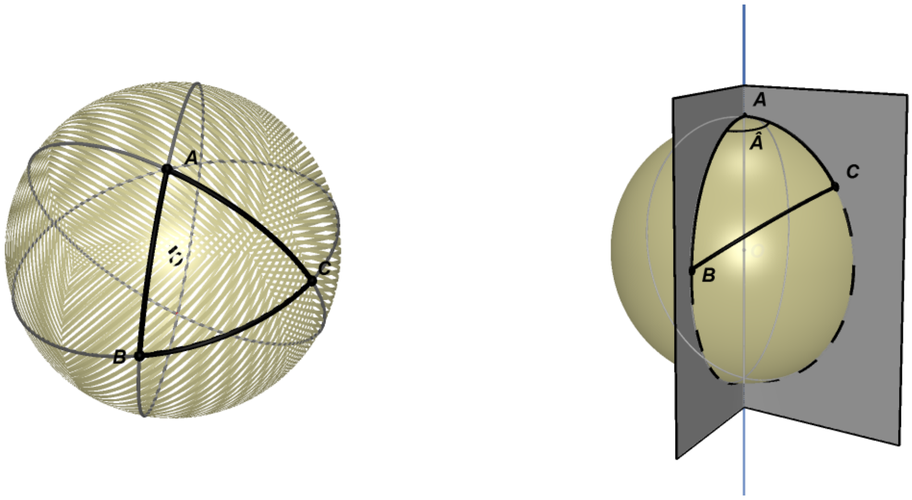

FIGURE 1 – *A gauche, construction des côtés du triangle sphérique* ABC*. A droite, remplissage de ce triangle par construction du secteur angulaire correspondant à l'angle intérieur* $\widehat{A}$*.*

- Une fois tracés les côtés du triangle, comment le "remplir", c'est à dire comment distinguer "l'intérieur" du triangle de son "extérieur" ?
  Par analogie avec le cas du plan [6], le grand cercle passant par A et B et le grand cercle passant par A et C découpent la sphère en quatre secteurs angulaires de sommet A (en forme de quartiers d'orange), dont un seul contient l'arc de grand cercle $\widehat{BC}$ (cf. figure 1), l'intérieur du triangle sphérique ABC est la portion de ce secteur angulaire limitée par l'arc de grand cercle $\widehat{BC}$ et qui contient A. De même, au sommet A, on définit l'angle intérieur $\widehat{A}$ du triangle sphérique comme l'angle en A de ce secteur angulaire.
- Comment définit-on l'angle en A entre les arcs de grands cercles (AB) et (AC) ?
  C'est l'angle entre les deux demi-droites tangentes en A à ces deux arcs ; c'est aussi l'angle du dièdre formé par les deux demi-plans limités par la droite (OA) et contenant respectivement le point B et le point C (cf la figure 1 de droite).

Nous avons vu que le grand cercle passant par A et B et le grand cercle passant par A et C découpent la sphère en quatre secteurs angulaires de sommet A : un de ces secteurs angulaires contient le côté $\widehat{BC}$ et un autre est son symétrique pour la symétrie de centre O : la réunion de ces deux secteurs angulaires définit le "*double secteur angulaire associé au sommet* A" (cf. la figure 2 de gauche), que nous noterons $\mathcal{S}_A$.

La réunion des trois doubles secteurs angulaires $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$ et $\mathcal{S}_C$ associés aux sommets A, B et C recouvre une fois chacun des points de la sphère, à l'exception du triangle sphérique ABC et de son triangle symétrique (pour la symétrie de centre O) $A'B'C'$, qui sont recouverts trois fois (cf. la figure 2 de droite), on a donc, en notant $\text{Aire}\,(ABC)$ l'aire du triangle sphérique ABC :

5. Cependant, le théorème donnant la somme des angles d'un triangle shérique que nous allons énoncer est encore vrai lorsque deux des sommets, par exemple A et B, sont antipodaux : il y a alors en effet une infinité de choix différents possibles pour le côté $\widehat{AB}$, chacun de ces choix définissant un triangle sphérique ABC différent.

6. Dans le plan (respectivement sur la sphère), la courbe brisée fermée formée par les trois côtés du triangle partage le plan (respectivement la sphère) en deux domaines T_1 et T_2 ; dans le plan, on définit habituellement l'intérieur du triangle comme étant celui de ces deux domaines qui est borné ; sur la sphère, ce procédé est inopérant car les domaines T_1 et T_2 sont alors tous deux bornés. Une définition alternative, dans le cas du plan, est de décider que l'intérieur du triangle est celui des deux domaines T_1 et T_2 qui est entièrement contenu dans le seul des quatre secteurs angulaires de sommet A découpés par les droites (AB) et (AC) qui contienne le segment $[BC]$. C'est cette dernière définition que nous allons généraliser ici au triangle sphérique ABC.

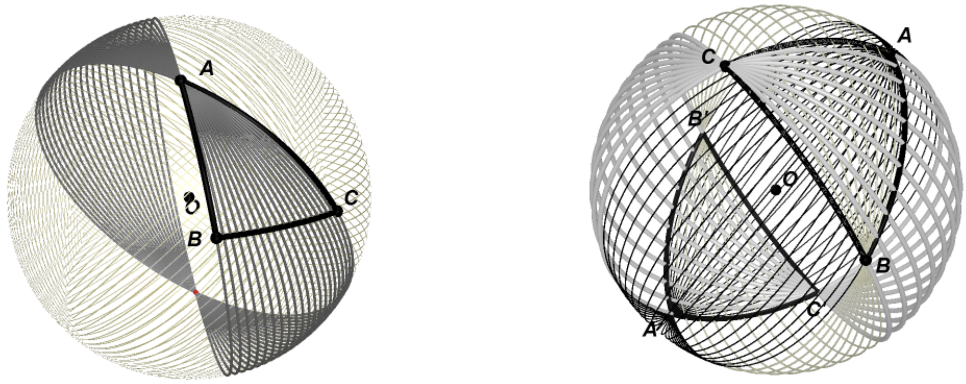

FIGURE 2 – *A gauche, construction du "double secteur angulaire $\mathcal{S}_A$ associé au sommet A". A droite, la réunion des trois doubles secteurs angulaires $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$ et $\mathcal{S}_C$ associés aux sommets A, B et C recouvre une fois chacun des points de la sphère, à l'exception du triangle sphérique ABC et de son triangle symétrique $A'B'C'$, qui sont recouverts trois fois.*

$$\text{Aire}\,(\mathcal{S}_A) + \text{Aire}\,(\mathcal{S}_B) + \text{Aire}\,(\mathcal{S}_C) = \text{Aire}\left(\mathbb{S}^2\right) + 2\,\text{Aire}\,(ABC) + 2\,\text{Aire}\,(A'B'C')\ , \qquad (1)$$

où *on rappelle que nous travaillons sur la sphère dont le rayon est l'unité de longueur, ce qui signifie que l'aire d'un triangle de cette sphère (ou de toute portion de cette sphère) est mesurée par rapport à l'unité d'aire correspondant à cette unité de longueur.*

Si on admet pour le moment que l'aire du double secteur angulaire $\mathcal{S}_A$ est proportionnelle à la mesure (en radians) de son angle au sommet $\widehat{A}$, le fait que $\mathcal{S}_A$ recouvre toute la sphère $\mathbb{S}^2$ lorsque la mesure de $\widehat{A}$ est égale à π implique que

$$\frac{\text{Aire}\,(\mathcal{S}_A)}{\text{mesure de } \widehat{A}} = \frac{\text{Aire}\left(\mathbb{S}^2\right)}{\pi} = \frac{4\,\pi}{\pi} = 4$$

En injectant cette dernière estimée dans l'équation (1), et en notant $\widehat{A}$ à la fois l'angle intérieur du triangle au sommet A et sa mesure en radians, nous obtenons

$$4\,\widehat{A} + 4\,\widehat{B} + 4\,\widehat{C} = 4\,\pi + 4\,\text{Aire}\,(ABC)\ ,$$

d'où le résultat [7]

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi + \text{Aire}\,(ABC)\ . \qquad (2)$$

Au passage, l'équation (2) prouve que le célèbre Axiome d'Euclide n'est pas vérifié par la géométrie sphérique [8], puisque la somme des angles d'un triangle (non aplati) n'est pas égale à π.

7. Que donne cette formule sur une sphère de rayon R ? A cette question, la réponse est :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi + \frac{\text{Aire}\,(ABC)}{R^2}\ .$$

Ceci se déduit de l'égalité (2) car l'homothétie de rapport $\frac{1}{R}$ envoie la sphère de rayon R sur la sphère de rayon 1 et les grands cercles sur des grands cercles, elle conserve les angles et multiplie les aires par $\frac{1}{R^2}$.

8. Il y a cependant une preuve plus simple du fait que l'Axiome d'Euclide n'est pas vérifié par la géométrie sphérique : en effet deux "droites" de la géométrie sphérique (i. e. deux grands cercles) se rencontrent toujours, il n'y a donc pas de "droites" parallèles.

Paradoxalement, le point de cette “démonstration” qui a été le plus difficile à admettre par les participants est le fait que l'aire d'un double secteur angulaire est proportionnelle à la mesure de son angle au sommet. On trouvera une preuve de ce fait dans le texte déposé sur le site de l'IREM de Grenoble (cf. ci-dessus).

2. Le projeté sur un plan d'un angle de l'espace est-il inférieur ou égal à cet angle ? Sinon, est-il égal, ou plus grand ?

Cette question de comparer un angle à son projeté s'est posée à nous [9] dans la recherche d'une démarche “élémentaire” pour caractériser le (ou les ?) plus court chemin joignant deux points sur la sphère. On subodore que ces chemins sont des arcs de grands cercles [10], mais nous cherchions une démonstration avec des moyens élémentaires, évitant le recours à la trigonométrie et au calcul intégral ou différentiel.

Voici les principales pistes de solution proposées par des enseignants [11] lors d'une séance de réflexion et leur cohérence [12].

a. Dans l'espace, quand on projette (orthogonalement) un angle sur un plan, obtient-on un angle plus petit ?

Bien que les objections suivantes n'aient pas toutes été soulevées immédiatement, pour la cohérence, nous les évoquerons au préalable :

– Qu'est-ce qu'un angle dans l'espace ? et (subsidiairement), y-a-t-il, comme dans le plan, une notion d'angle orienté dans l'espace ?
– Quel type de projection utilise-t-on ? Comment définit-on l'angle projeté ? Existe-t-il toujours ?

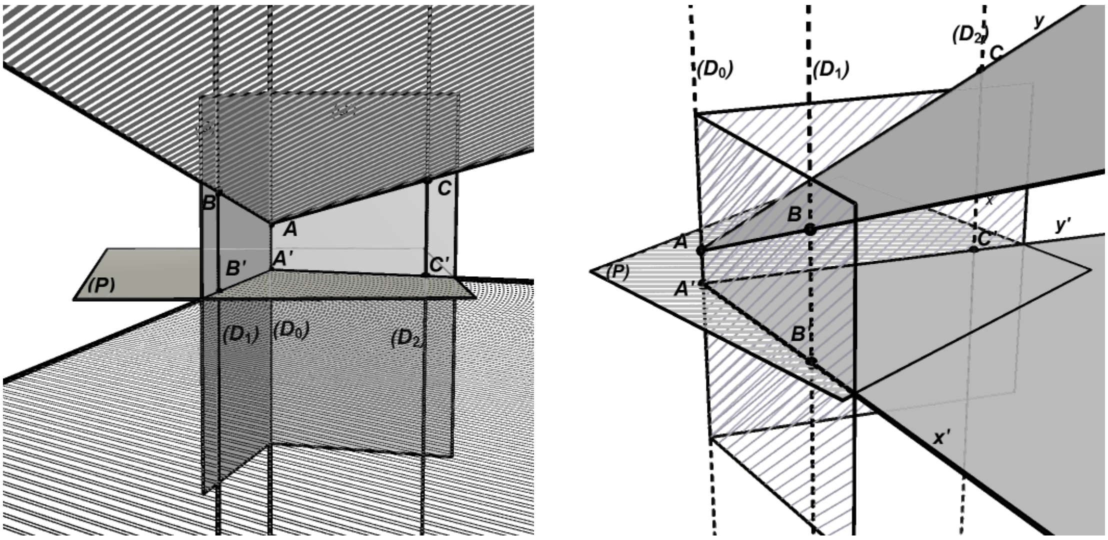

FIGURE 3 – *Sur ces deux figures, l'angle* $\widehat{x'A'y'} = \widehat{B'A'C'}$ *est la projection de l'angle* $\widehat{xAy} = \widehat{BAC}$

9. Par “nous”, il faut entendre le groupe “géométries non euclidiennes” de l'Irem de Grenoble.

10. On appelle “grand cercle” un cercle obtenu par intersection de la sphère avec un plan passant par son centre. Ce qui fait penser que “ces grands cercles” sont des plus courts chemins est le fait que, parmi tous les cercles qu'on peut tracer sur la sphère, ce sont les moins courbés, donc les plus proches des droites de l'espace... mais ceci est loin d'être une démonstration !

11. Nous avons regroupé ici les propositions faites lors de l'atelier des Journées Nationales de Grenoble et celles émises lors d'un atelier antérieur.

12. A cet endroit, le lecteur consciencieux est invité à dessiner une ou plusieurs figures ; ou à utiliser les figures du site www-irem.ujf-grenoble/nonEuclid/ (figures Cabri3D manipulables).

En ce qui concerne ces questions, on s'entend très vite sur le fait qu'un angle $\widehat{xAy}$ est la donnée d'une paire de demi-droites Ax, Ay issues d'un même point A, que la projection est la projection orthogonale sur un plan (P) fixé, que cette projection envoie les deux demi-droites Ax et Ay sur deux demi-droites, notées $A'x'$ et $A'y'$ et que l'angle projeté est l'angle $\widehat{x'A'y'}$ formé par ces deux dernières demi-droites... Encore faut-il (comme cela a été assez vite remarqué) que la projection d'une des deux demi-droites Ax ou Ay ne soit pas réduite à un point, auquel cas l'angle projeté n'est pas défini, c'est pourquoi :

Nous supposerons toujours dans la suite qu'aucun des deux côtés Ax et Ay n'est perpendiculaire au plan (P).

L'idée d'utiliser des angles orientés a tenté bon nombre de participants et le fait qu'il n'existe pas de définition naturelle des angles orientés dans l'espace - même lorsque l'espace est lui-même orienté, par exemple par la fameuse "règle des trois doigts (de la main droite)" - a été perçu comme une perte de repère. On en trouvera une explication (et une expérimentation en 3D) sur le site de l'IREM de Grenoble indiqué plus haut [13].

Une autre question (pourtant naturelle) n'a été évoquée que de manière partielle pendant la séance et formalisée a posteriori : pour comparer deux angles, il faut pouvoir associer à chaque angle un nombre qui est sa "mesure d'angle". Mesurer l'angle défini par deux demi-droites Ax et Ay fait prendre conscience d'une des insuffisances de notre définition d'un angle dans l'espace. En effet une paire de demi-droites Ax et Ay (non portées par une même droite) détermine un plan et, dans ce plan, deux secteurs angulaires : l'un saillant (ou convexe), l'autre rentrant (ou non convexe). Par définition, ce que nous considérons est "l'angle géométrique" des deux demi-droites, qui correspond au secteur angulaire saillant et dont la mesure est strictement comprise entre 0 et π (c'est à dire entre $0°$ et $180°$) [14]. Cette façon de voir permet effectivement de définir, entre deux angles, lequel est le plus grand en comparant leurs mesures (c'est à dire en comparant deux nombre compris entre 0 et π) [15].
Le choix du secteur saillant de préférence au secteur rentrant et le fait que (par bonheur, car ceci autorise la comparaison entre la mesure d'un angle projeté et celle de l'angle initial) l'image d'un secteur angulaire saillant par la projection sur un plan est encore un secteur angulaire saillant (car l'image par cette projection d'un ensemble convexe est un ensemble convexe) ont été abondamment commentés en séance. En revanche la question de la nécessaire distinction entre un angle et sa mesure n'a été soulevée qu'après coup, soit parce qu'elle ne faisait pas problème, soit parce que la mesure d'angle est (en géométrie plane) une notion largement acceptée et expérimentée dans le système scolaire [16] ; cette "acceptation automatique" de la notion a

13. Cette explication peut se schématiser grossièrement comme suit : pour définir un angle orienté, il faut orienter le plan dans lequel se trouve l'angle ou, de manière équivalente, décider d'un sens de rotation dans ce plan que nous appelons sens trigonométrique... mais, dans ce même plan, ce qui paraîtra tourner dans le sens trigonométrique pour un observateur regardant le plan "de dessus", paraîtra tourner dans le sens opposé pour un observateur regardant le plan "de dessous", il faudrait donc pouvoir, pour chaque plan, décider quel est le demi-espace situé "au dessus" du plan et quel est le demi-espace situé "en dessous", mais cette notion de "dessus" et de "dessous" est relative à l'observateur (elle n'est pas la même pour un observateur situé aux antipodes). Sauf à privilégier arbitrairement le point de vue d'un observateur, il n'y a donc pas de moyen naturel de déduire l'orientation du plan de l'orientation de l'espace.

14. Deux cas exceptionnels sont à considérer : le cas où les deux demi-droites Ax et Ay sont confondues, auquel cas le secteur angulaire saillant correspondant est réduit à cette demi-droite et sa mesure vaut 0 radians (soit $0°$), et le cas où les deux demi-droites Ax et Ay sont opposées (i. e. dans le prolongement l'une de l'autre), auquel cas le secteur angulaire saillant correspondant est n'importe lequel des demi-plans délimité par la droite obtenue par réunion de ces deux demi-droites et sa mesure vaut π radians (soit $180°$) ; dans ces deux cas exceptionnels, le secteur angulaire saillant est encore un sous-ensemble convexe dans un plan.

15. Une autre méthode, dite de superposition, consiste à opérer un déplacement qui place l'un des secteurs angulaires à l'intérieur de l'autre secteur angulaire en faisant également coïncider les deux sommets : ceci permet de décider si deux angles sont égaux (lorsque les deux secteurs saillants ainsi obtenus coïncident) ou si l'un est plus grand que l'autre (lorsque le second secteur angulaire est inclus dans le premier).

16. C'est aussi probablement la raison pour laquelle il n'a été proposé qu'après coup de comparer deux angles par la méthode de superposition évoquée dans la précédente note de bas de page, ce qui aurait permis de s'affranchir

cependant un prix : l'élève oublie rapidement que l'angle est un objet géométrique, pour ne retenir que son aspect numérique, à savoir sa mesure.

1. *Une première piste proposée pour répondre à la question* :

   Il est proposé de fixer les trois points A', B' et C' (non alignés) dans le plan de projection (P), de tracer les droites (D_0), (D_1) et (D_2) perpendiculaires au plan (P) en A', B' et C' respectivement, de considérer les points B et C comme des points mobiles se déplaçant respectivement sur les droites (D_1) et (D_2), et de confondre le point A avec le point A' (cf. la figure 4). Cette construction a un double avantage :
   - quelle que soit la position des points B et C sur les droites (D_1) et (D_2), les points A', B' et C' sont les projections orthogonales des points A, B et C sur le plan (P),
   - les points A', B' et C' étant fixes, l'angle $\widehat{B'A'C'}$ est fixé ; ceci permet, en déplaçant les points B et C sur les droites (D_1) et (D_2), de faire beaucoup varier l'angle $\widehat{BAC}$ et de le comparer à l'angle fixe $\widehat{B'A'C'}$. À la question initiale, ceci donne la réponse suivante :

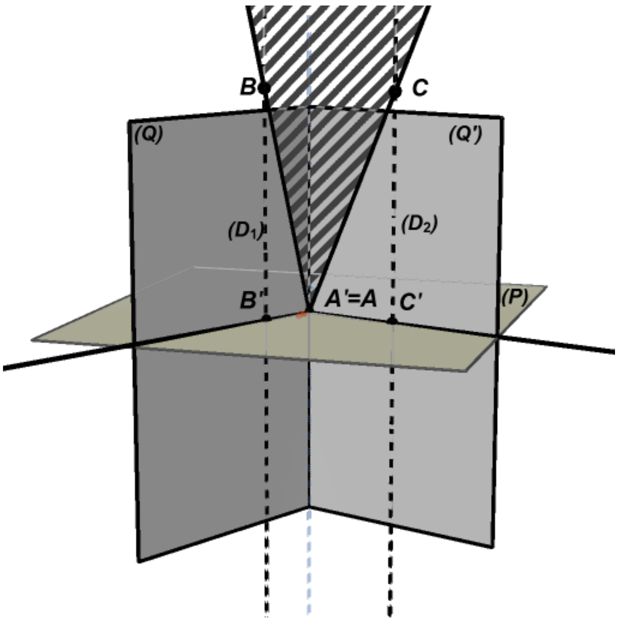

FIGURE 4 – *Que se passe-t-il lorsque les points B et C tendent vers l'infini sur les droites (D_1) et (D_2) ?*

   Réponse : En faisant tendre les points B et C vers l'infini sur les droites (D_1) et (D_2), du même côté du plan (P) (ces deux points partant vers le haut par exemple, cf la figure 4), on fait tendre les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ vers une même demi-droite de la droite (D_0) (en effet les angles $\widehat{B'A'B}$ et $\widehat{C'A'C}$ tendent alors vers $\dfrac{\pi}{2}$, soit $90°$). On en déduit que l'angle $\widehat{BAC}$ de ces deux demi-droites tend vers zéro alors que l'angle projeté $\widehat{B'A'C'}$ est resté constant pendant ce processus.
   Il est donc impossible que la projection diminue systématiquement les angles.

   En faisant tendre les points B et C vers l'infini sur les droites (D_1) et (D_2), de part et d'autre du plan (P) (en faisant partir un de ces deux points vers le haut et l'autre vers le bas), on fait tendre les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ vers les deux demi-droites opposées de la droite (D_0) (en effet les angles $\widehat{B'A'B}$ et $\widehat{C'A'C}$ tendent alors vers $\dfrac{\pi}{2}$, soit $90°$). On en déduit que l'angle $\widehat{BAC}$ de ces deux demi-droites tend vers π, soit $180°$ alors que l'angle

de la notion de "mesure d'angle".

projeté $\widehat{B'A'C'}$ est resté constant (et inférieur strictement à π) pendant ce processus. *Il est donc impossible que la projection augmente systématiquement les angles.*

2. *Une seconde piste proposée pour répondre à la question* :

   Supposons qu'il existe un angle $\widehat{xAy}$ tel que sa projection orthogonale $\widehat{x'A'y'}$ sur le plan (P) vérifie $\widehat{x'A'y'} < \widehat{xAy}$. Plaçons un point B sur la demi-droite Ax et un point C sur la demi-droite Ay ; notons B' et C' les projections orthogonales des points B et C sur le plan (P). Les points B' et C' étant situés respectivement sur les demi-droites $A'x'$ et $A'y'$, on a également $\widehat{B'A'C'} < \widehat{BAC}$.

   On remarquera que les angles $\widehat{B'A'C'}$, $\widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{A'C'B'}$ du triangle $A'B'C'$ sont les projections sur le plan (P) des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ du triangle ABC (cf. la figure 5).

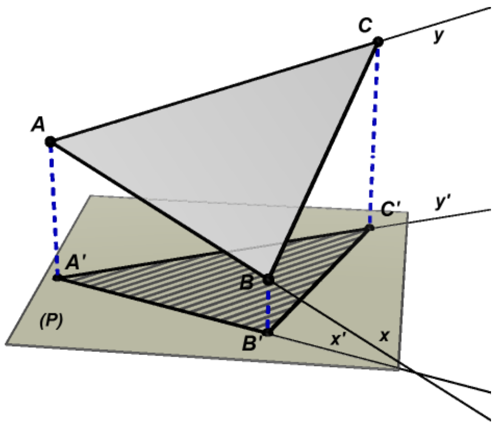

Figure 5 – *Les angles du triangle $A'B'C'$ sont les projections sur le plan (P) des angles du triangle ABC.*

De la propriété de la somme des angles d'un triangle, on déduit que

$$\widehat{B'A'C'} + \widehat{A'B'C'} + \widehat{A'C'B'} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ = \pi \text{ (en radians)} .$$

Comme $\widehat{B'A'C'} < \widehat{BAC}$, il est impossible d'avoir en même temps $\widehat{A'B'C'} \leq \widehat{ABC}$ et $\widehat{A'C'B'} \leq \widehat{ACB}$, ce qui signifie que la projection a augmenté au moins un des deux angles $\widehat{ABC}$ ou $\widehat{ACB}$. On en déduit que

S'il existe un angle qui est (strictement) diminué par la projection, il existe un autre angle qui est (strictement) augmenté par la projection

Un raisonnement analogue montre que

S'il existe un angle qui est (strictement) augmenté par la projection, il existe un autre angle qui est (strictement) diminué par la projection

Ce raisonnement a été salué de manière quasi unanime comme le plus convaincant : en effet, le fait que la somme des angles d'un triangle soit égale à π (ou $180°$) est un des résultats les mieux établis de la culture scolaire, donc facile à faire passer auprès des étudiants, alors que la première piste proposée ci-dessus fait implicitement appel à des notions de limite (d'une demi-droite, d'un angle) et de continuité (de la mesure de l'angle par rapport aux rotations de la demi-droite) assez difficiles à formaliser, et en tout cas pas à la portée d'élèves moyens. De plus, le fait que la somme des angles d'un triangle soit égale à π bénéficie d'un vrai statut, puisqu'on sait ce résultat équivalent à l'Axiome d'Euclide.

Malgré cela, ce raisonnement n'est pas tout à fait complet : en effet il prouve seulement qu'il n'y a que 2 cas possibles :

– soit certains angles sont strictement augmentés et d'autres sont strictement diminués par la projection,
– soit la projection conserve **tous** les angles.

Pour que le raisonnement soit complet, il faut encore éliminer cette dernière possibilité ; ceci peut se faire (par exemple) de la manière suivante : si les demi-droites Ax et Ay sont situées dans un même plan (Q) perpendiculaire au plan de projection (P) (Ax et Ay étant supposées non perpendiculaires à (P) et non alignées), leurs projections $A'x'$ et $A'y'$ sont portées par une même droite : la droite d'intersection des plans (P) et (Q). On en déduit que $\widehat{x'A'y'}$ vaut $0\,°$ ou $180\,°$, donc que $\widehat{x'A'y'} \neq \widehat{xAy}$ (voir la figure 7, où la demi-droite $A'y'$ est confondue avec la demi-droite $A'x'$).

b. Dans l'espace, quand on projette (orthogonalement) un angle $\widehat{xAy}$ sur un plan, obtient-on un angle projeté $\widehat{x'A'y'}$ plus petit si on suppose qu'un des côtés (mettons Ax) de l'angle initial est parallèle au plan de projection ?

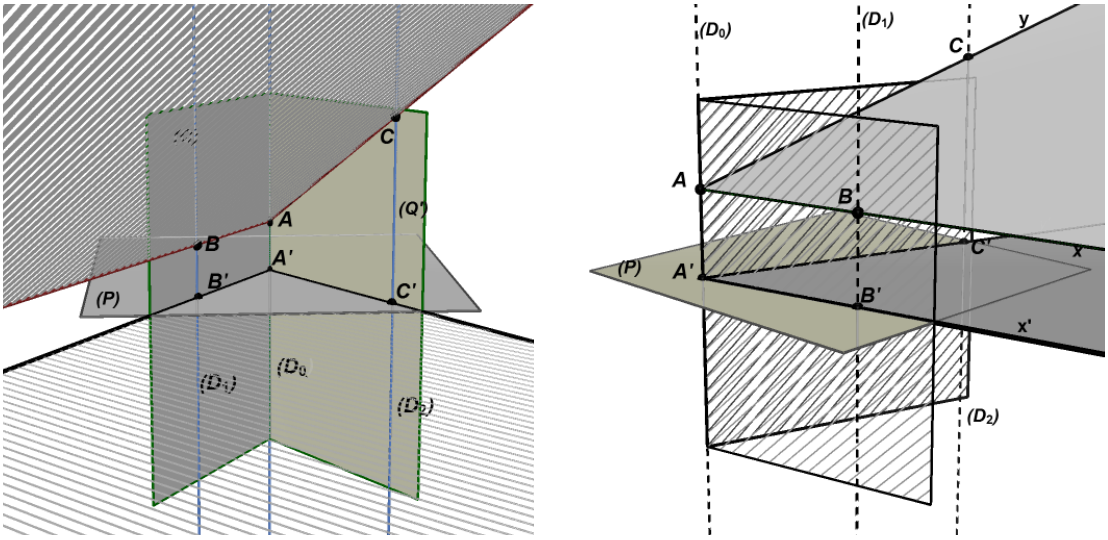

Figure 6 – *Sur ces deux figures, l'angle $\widehat{B'A'C'}$ est la projection de l'angle $\widehat{BAC}$, le côté AB de l'angle $\widehat{BAC}$ étant parallèle au plan de projection*

On a supposé que le côté Ax de l'angle $\widehat{xAy}$ est parallèle au plan (P) de projection ; par une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$, qui envoie A sur A' et la demi-droite Ax sur la demi-droite $A'x'$ on peut se ramener au cas où $Ax = A'x'$, donc au cas où Ax est contenu dans le plan (P) de projection.

Nous supposerons donc dorénavant que le côté Ax de l'angle $\widehat{xAy}$ est contenu dans le plan (P) de projection. Rappelons par ailleurs que nous avons supposé que le côté Ay n'est pas perpendiculaire au plan (P)

1. *Une première piste proposée pour répondre à la question :*

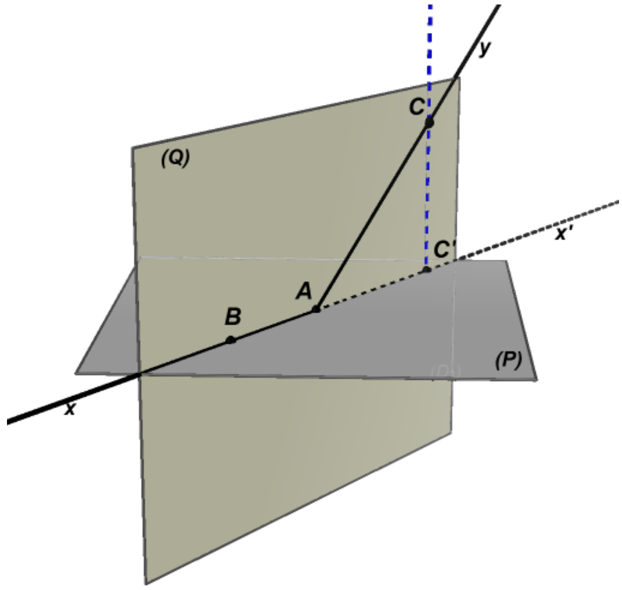

FIGURE 7 – Le cas où le deuxième côté Ay de l'angle $\widehat{xAy}$ est situé dans le plan perpendiculaire au plan (P) selon la droite $(AB) = x'x$.

Si le deuxième côté Ay de l'angle $\widehat{xAy}$ est situé dans le plan perpendiculaire au plan (P) et contenant la demi-droite Ax , son image par la projection othogonale sur le plan (P) est (comme on peut le vérifier sur la figure 7) :

- soit sur la demi-droite Ax , et alors l'angle projeté est l'angle $\widehat{xAx} = 0$: l'angle projeté est alors inférieur à l'angle initial $\widehat{xAy}$,
- soit la demi-droite opposée Ax' située dans le prolongement de Ax , et alors l'angle projeté est l'angle $\widehat{xAx'} = \pi = 180°$: l'angle projeté est alors supérieur à l'angle initial $\widehat{xAy}$.

Cependant ce cas, bien qu'il réponde à la question sur le plan de la logique, pourrait être considéré comme trop particulier pour une compréhension complète du phénomène, aussi a été proposée...

2. *Une seconde piste pour répondre à la question* :

Nous nous plaçons au contraire dans le cas où la demi-droite Ay n'est pas dans le plan (P) et où le plan contenant les demi-droites Ax et Ay n'est pas perpendiculaire au plan (P) (cf. la figure 8, les autres cas pouvant être considérés comme exceptionnels). Nous noterons encore Ax' la demi-droite opposée à Ax et située dans le prolongement de Ax , la réunion de ces deux demi-droites formant la droite $x'x$. Notons (Q) le demi-plan délimité par la droite $x'x$ et contenant la demi-droite Ay . Notons Ay' la demi-droite qui est l'image de Ay par la projection orthogonale sur le plan (P) .

Les deux angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{yAx'}$ ont chacun au moins un côté dans le plan (P) et leurs images (par la projection orthogonale sur le plan (P)) sont les angles $\widehat{xAy'}$ et $\widehat{y'Ax'}$. Comme on a

$$\widehat{xAy} + \widehat{yAx'} = \widehat{xAx'} = \pi = \widehat{xAy'} + \widehat{y'Ax'} \ , \tag{3}$$

la projection ne peut envoyer l'angle $\widehat{xAy}$ sur un angle (strictement) plus petit que si elle envoie l'angle supplémentaire $\widehat{yAx'}$ sur un angle (strictement) plus grand. Il est donc impossible que tous les angles projetés soient inférieurs ou égaux aux angles initiaux.

En fait, ce raisonnement n'est pas tout à fait complet : en effet il prouve seulement qu'il n'y a que 2 cas possibles : lorsqu'un des côtés est parallèle au plan de projection

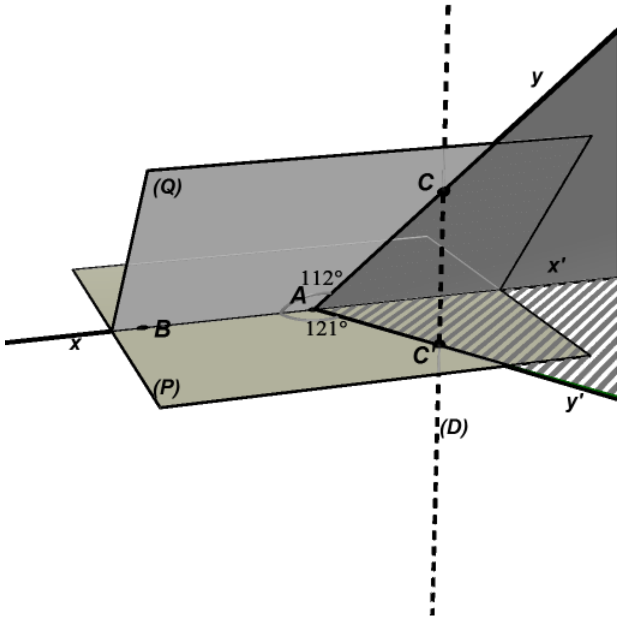

Figure 8 – Deux angles supplémentaires se projettent sur deux angles supplémentaires.

– soit certains angles sont strictement augmentés et d'autres sont strictement diminués par la projection,
– soit la projection conserve **tous** les angles.

Pour que le raisonnement soit complet, il faut encore éliminer cette dernière possibilité ; pour cela, on est tenté de procéder comme nous l'avons fait dans le cas général, c'est à dire en remarquant que, lorsque l'angle est aigu (resp. obtus) et contenu dans un plan perpendiculaire au plan (P), sa projection sur ce plan est un angle nul (resp. un angle plat), donc l'angle projeté n'est pas égal à l'angle initial... Le problème avec cet argument est que, pour faire le raisonnement ci-dessus, nous nous sommes placés dans le cas où le plan contenant les demi-droites Ax et Ay n'est pas perpendiculaire au plan (P), ce qui est contradictoire, sauf à se ramener, pour lever cette contradiction, aux arguments utilisés dans la première piste évoquée ci-dessus ! [17]
Ces observations ont amené les participants à énoncer la “conjecture” suivante

Conjecture : *Si l'angle de départ est aigu, la projection diminue l'angle. Si l'angle de départ est obtus, la projection augmente l'angle.*
Par continuité, si l'angle de départ est droit, la projection conserve l'angle.

On trouvera une démonstration en forme de cette “conjecture” sur le site de l'IREM de Grenoble précisé ci-dessus.
Remarquons qu'il suffit de faire cette démonstration lorsque l'angle est aigu. En effet, si la conjecture est vraie pour tout angle aigu, considérons un angle obtus $\widehat{xAy}$ quelconque : son supplémentaire $\widehat{yAx'}$ est aigu donc $\widehat{x'Ay} \geq \widehat{x'Ay'}$ ce qui, par supplémentarité, en appliquant les égalités (3), implique que

$$\widehat{xAy} = \pi - \widehat{x'Ay} \leq \pi - \widehat{x'Ay'} = \widehat{xAy'} ,$$

17. Un autre moyen de lever cette contradiction est de considérer le cas où le plan contenant les demi-droites Ax et Ay est perpendiculaire au plan (P) comme une situation-limite de cas où le plan contenant les demi-droites Ax et Ay est de plus en plus proche de la position perpendiculaire au plan (P). Lorsque $\widehat{xAy}$ est strictement aigu (resp. strictement obtus), sa projection $\widehat{xAy'}$ est alors de mesure d'angle de plus en plus proche de 0 (resp. de plus en plus proche de π). Comme $\widehat{xAy}$ est de mesure fixée (différente de 0, $\frac{\pi}{2}$ et π), ceci prouve que les mesures de $\widehat{xAy}$ et de $\widehat{xAy'}$ ne peuvent demeurer égales pendant ce processus. On trouvera une démonstration plus classique sur le site de l'IREM de Grenoble précisé ci-dessus.

ce qui démontre que, si l'angle de départ est obtus, la projection augmente l'angle (à condition d'avoir démontré au préalable que, si l'angle de départ est aigu, la projection diminue l'angle).

Comme il est naturel, les quelques éléments de réponses donnés ci-dessus posent autant de questions qu'ils apportent de réponses. Une conclusion, sous forme de mise au point construite et de démonstration rigoureuse, serait nécessaire ; on pourra en trouver une (du moins l'espéronsnous !) sur le site www-irem.ujf-grenoble.fr.