GROUPEMENT D'ÉCOLES D'INGENIEURS PUBLIQUES À PARCOURS INTÉGRÉ

ISAT ESIREM POLYTECH Nice-Sophia POLYTECH Orléans EEIGM ENSGSI ESSTIN TELECOM Lille 1 ISEL ISTIA ISTASE ISTV Sup GALILÉE

Mercredi 9 mai 2018

SUJET DE MATHÉMATIQUES

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I **10 points**

Partie A

a est un nombre réel.
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 & = & a \\ v_n & = & -1+nv_{n-1} \text{ pour tout } n \geqslant 1 \end{cases}$$

```
L1   Variables
L2       k et n sont des entiers
L3       a et v sont des réels
L4   Entrée
L5       Lire la valeur de a
L6       Lire la valeur de n
L7   Traitement
L8       v prend la valeur a
L9   Pour k allant de 1 à n faire
L10      v prend la valeur …
L11  Fin pour
L12  Sortie
L13      Afficher v
```

1. Afin de calculer v_n pour une valeur de n et une valeur de a données, on a écrit l'algorithme ci-contre dont la ligne 10 est incomplète.

   Comment doit-on la compléter ? Entourer la bonne réponse parmi les réponses proposées.

Partie B

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f_n(x) = (1-x)^n \mathrm{e}^x.$$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\text{pour tout } n \geqslant 0,\ u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x.$$

1. Donner la valeur exacte de u_0 puis donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de u_0.
2. On considère la fonction F définie par :

   $$\text{pour tout réel } x,\ F(x) = (2-x)\mathrm{e}^x.$$

   a. F' désigne la dérivée de F.
   Pour tout réel x, $F'(x)$ s'écrit sous la forme $F'(x) = h(x)\mathrm{e}^x$.
   Donner l'expression de $h(x)$.

   b. En déduire la valeur exacte de u_1. Détailler le calcul.
3. Soit $n \geqslant 0$. Exprimer I_n en fonction de n. Détailler le calcul.
4. **a.** Donner un encadrement de e^x lorsque $0 \leqslant x \leqslant 1$. Justifier votre réponse.

   b. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $\alpha I_n \leqslant u_n \leqslant \beta I_n$, où α et β sont des réels strictement positifs à préciser.
5. Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Partie C

Dans cette question, n est un entier naturel non nul et x est un réel.

1. **a.** f_n' désigne la dérivée de f_n. Détailler le calcul de $f_n'(x)$.

   b. Donner l'expression de $f_n(x) - f_n'(x)$ en fonction de $f_{n-1}(x)$.

2. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = -1 + nu_{n-1}$.

3. On admet le résultat suivant concernant les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies dans les parties A et B : pour tout $n \geqslant 0$, $v_n - u_n \geqslant n(v_0 - u_0)$.
   Utiliseriez-vous l'algorithme de la partie A avec $a = 1,72$ en entrée pour calculer, pour tout entier n, une valeur approchée de u_n ?

EXERCICE II

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Un équipementier de matériels sportifs possède plusieurs magasins à la montagne. Il propose du matériel de glisse en location. La probabilité que le matériel loué soit rendu abîmé après une journée de location est :

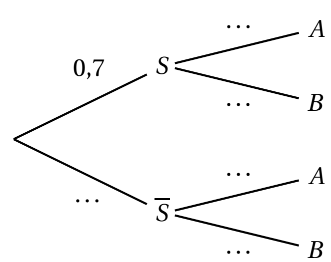
$$p_1 = 0,1 \text{ pour une paire de skis et } \quad p_2 = 0,2 \text{ pour un surf.}$$

Partie A

Pendant chaque saison hivernale, un sportif, prénommé Julien, loue du matériel un jour par semaine. À chaque location, la probabilité qu'il loue des skis est égale à $0,7$ et celle qu'il loue un surf est égale à $0,3$.

On considère les évènements suivants :
S : « Julien choisit de louer des skis »
A : « Julien rend le matériel abîmé »
B : « Julien rend le matériel en bon état ».

1. Compléter l'arbre ci-dessous avec les probabilités correspondantes.



2. Une semaine, Julien loue du matériel.
   Dans chacune des trois questions qui suivent, une affirmation vous est proposée et vous devez indiquer si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Une réponse incorrecte sera pénalisée, une absence de réponse ne sera pas pénalisée.

   a. La probabilité que Julien rende un surf abîmé est plus élevée que la probabilité qu'il rende des skis abîmés.

   b. La probabilité que Julien rende le matériel en bon état vaut $0,7p_1 + 0,3p_2$.

   c. Julien rend le matériel abîmé. La probabilité qu'il s'agisse de skis vaut $\dfrac{7}{13}$.

Partie B

Pendant la saison hivernale 2017 - 2018, l'équipementier fait payer 5 euros la réparation du matériel loué à la journée lorsqu'il est rendu abîmé.
Julien compte effectuer n journées de locations de matériel durant cette saison.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de locations où il abîme le matériel.

1. X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Justifier que $p = 0,13$.
2. Donner, en fonction de n, la probabilité p_3 que Julien n'abîme jamais le matériel au cours de la saison.
3. On note M_n le montant, en euros, que Julien devra débourser en moyenne pour les réparations pendant la saison. Exprimer M_n en fonction de n.
4. L'équipementier propose aux clients réguliers de souscrire une assurance de 10 euros qui couvre toutes les réparations pendant la saison.
   a. Julien a-t-il intérêt à souscrire l'assurance s'il loue 12 fois du matériel pendant la saison ? Justifier la réponse.
   b. À partir de combien de locations devient-il rentable pour Julien de souscrire l'assurance ? Justifier la réponse.

Partie C

L'équipementier affirme que 10 % des paires de skis louées à la journée sont rendues abîmées.
Une association sportive veut louer du matériel pour une journée.
L'équipementier prépare alors un lot de 85 paires de skis choisies au hasard dans son stock.

1. Soit F la variable aléatoire représentant la fréquence de paires de skis rendues abîmées dans le lot. On admet que F suit une loi normale.
   Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de F.
   Les valeurs numériques des bornes de I seront arrondies à 10^{-3} près.
2. L'équipementier constate que, dans le lot, 11 paires de skis sont rendues abîmées.
   Peut-on dire, au risque de 5 %, que la fréquence des paires de skis rendues abîmées dans le lot confirme l'affirmation de l'équipementier ? Justifier la réponse.

EXERCICE III

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes

À chaque question, une affirmation vous est proposée et vous devez indiquer si elle est vraie ou fausse dans le cadre prévu. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse incorrecte sera pénalisée, une absence de réponse ne sera pas pénalisée.

Dans les parties A, B, C et D, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

Partie A

On considère deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ donnés par leur équation cartésienne :

$$\mathscr{P}_1 : \quad 2x+3y+4z-1=0 \qquad \mathscr{P}_2 : \quad x+2y+z=0.$$

1. Le vecteur $\vec{n}\left(1~;~\frac{3}{2}~;~2\right)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_\infty$.
2. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles.
3. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants et leur intersection est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\,(-5~;~2~;~1)$.

Partie B

On note R, S, T et U les points de coordonnées respectives :

$$\mathrm{R}(2\,;\,4\,;\,1)\quad \mathrm{S}(0\,;\,4\,;\,-3)\quad \mathrm{T}(3\,;\,1\,;\,-3)\quad \mathrm{U}(1\,;\,0\,;\,-2)$$

Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne : $2x+2y-z-11=0$.

1. Les points R, S et T appartiennent à un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}2\,;\,2\,;\,-1)$.
2. La droite (TU) est orthogonale à la droite (RS) et admet la représentation paramétrique suivante : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1+2t\\ y &=& -1+t \\ z &=& 1-t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$.
3. Le point V(3; 2; -1) est le projeté orthogonal du point U sur le plan P.

Partie C

Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites données par un système d'équations paramétriques :

$$\mathscr{D}_1 : \left\{\begin{array}{l} x=1+t\\ y=t\\ z=-5+t\end{array}\right. ,\, t\in\mathbb{R} \qquad \mathscr{D}_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 8+k\\ y &=& 4+k\\ z &=& -3\end{array}\right. ,\, k\in\mathbb{R}.$$

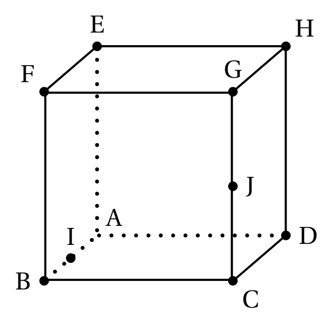
On note $\mathscr{Q}$ le plan d'équation : $2x-3y+2z=0$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{u}\,(1\,;\,1\,;\,1)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$.
2. La droite $\mathscr{D}_2$ passe par le point de coordonnées (5; 1; -3).
3. Soient M un point de $\mathscr{D}_1$ et N un point de $\mathscr{D}_2$ de coordonnées respectives : $M(1+t\,;\,t\,;\,-5+t)$ et $N(8+k\,;\,4+k\,;\,-3)$.

   La droite (MN) est parallèle au plan $\mathscr{Q}$ si et seulement si $t+k=6$.

Partie D

On considère un cube ABCDEFGH. Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On note I et J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CG].



1. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{1}{2}$.
2. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IJ}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IC}}$.
3. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IJ}}=\mathrm{AB}\times\mathrm{IC}\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

EXERCICE IV

Les cinq parties de cet exercice sont indépendantes
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$

Partie A
a désigne un nombre réel. On considère les nombres complexes :
$z_1=(-4a+\mathrm{i})(a-\mathrm{i})-(1+2a\mathrm{i})^2 \quad z_2=\dfrac{2+2a\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \quad z_3=2\sqrt{3}-2\mathrm{i} \quad z_4=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$

1. Déterminer la forme algébrique de z_1. Détailler le calcul.
2. Déterminer la forme algébrique de z_2. Détailler le calcul.
3. Déterminer le module $|z_3|$ et un argument $\arg(z_3)$ de z_3. Justifier la réponse.
4. Déterminer la forme exponentielle de z_4. Justifier la réponse.

Partie B

Soit x un réel strictement positif.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1 - x\text{i} \qquad z_{\text{B}} = 2\text{i} \qquad z_{\text{C}} = -2.$$

1. Donner les distances AB et AC en fonction de x.
2. Pour quelle valeur de x le triangle ABC est-il isocèle en A ? Justifier la réponse.
3. Le triangle ABC peut-il être équilatéral ? Justifier la réponse.
4. Soit D le point tel que ABCD est un parallélogramme.
   Déterminer, en fonction de x, l'affixe z_{D} du point D. Justifier la réponse.

Partie C

Déterminer l'ensemble F_1 des solutions dans $\mathbb{C}\backslash\{-4\}$ de l'équation : $(E_1) \quad \dfrac{z+2}{z+4} = z+3$.
Justifier la réponse.

Partie D

Déterminer l'ensemble F_2 des nombres complexes $z = x + textiy$, solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :
$(E_2) \quad 2\text{i}z - 1 = \overline{z} + \text{i}$.
Justifier la réponse.

Partie E

On considère les points E, F et G d'affixes respectives :

$$z_{\text{E}} = \text{i} \qquad z_{\text{F}} = -2 \qquad z_{\text{G}} = 4\text{i}.$$

1. Donner, sans justification, l'ensemble F_3 des points M d'affixe z tels que : $|z - \text{i}| = 2$.
2. Donner, sans justification, l'ensemble F_4 des points M d'affixe z tels que : $|z+2| = |z - 4\text{i}|$.