GROUPEMENT D'ÉCOLES D'INGENIEURS PUBLIQUES À PARCOURS INTÉGRÉ

ISAT ESIREM POLYTECH Nice-Sophia POLYTECH Orléans EEIGM ENSGSI ESSTIN TELECOM Lille 1 ISEL ISTIA ISTASE ISTV Sup GALILÉE

Mercredi 9 mai 2007

SUJET DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE I **10 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1-x)\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. **a.** Donner les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

   b. En déduire que f admet une asymptote Δ au voisinage de $-\infty$ dont on donnera une équation.

2. **a.** Déterminer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f.

   b. Compléter le tableau des variations de f.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente T_1 au point A d'abscisse 1 de la courbe $\mathscr{C}_f$ et une équation de la tangente T_{-1} au point B d'abscisse -1.

   b. Expliquer pourquoi l'on peut affirmer que les tangentes T_1 et T_{-1} sont perpendiculaires.

4. On se propose d'étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T_{-1}.
   Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$g(x) = (1-x)\mathrm{e}^x - \left(\frac{x+3}{\mathrm{e}}\right).$$

   a. Déterminer $g'(x$ et $g''(x)$ où g' et g'' sont les dérivées première et seconde de g.

   b. Étudier le signe de g'' et le sens de variation de g'. Préciser la valeur de $g'(-1)$.
   Étudier le signe de g' et le sens de variation de g. Préciser la valeur de $g(-1)$.
   Enfin donner le signe de g.

   c. Indiquer alors la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente T_{-1}.

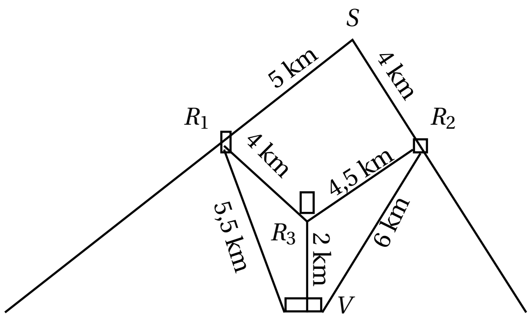
5. Tracer l'asymptote Δ, les tangentes T_1 et T_{-1} et la courbe $\mathscr{C}_f$.
   Pour tracer ces courbes, on considèrera les valeurs approchées suivantes :

   $$\mathrm{e} \approx 2,7 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,4.$$

EXERCICE II **4 points**

Pour descendre du sommet S d'une montagne, des skieurs ont la possibilité d'emprunter plusieurs parcours. Ils doivent impérativement passer par l'un des deux restaurants se trouvant tous les deux à 2 200 mètres d'altitude. Les deux restaurants ne sont pas situés sur le même versant de la montagne. On les nomme R_1 et R_2.
Après la pause repas, pour atteindre le village V qui se trouve à 1 100 m d'altitude, les skieurs ont deux possibilités : ils peuvent descendre directement au village ou faire une halte au restaurant R_3 qui se trouve à 1 800 m d'altitude, pour prendre un café.

La probabilité que les skieurs choisissent de passer par R_1 est égale à $\frac{1}{3}$.
En partant de R_1, la probabilité que les skieurs descendent directement au village est égale à $\frac{3}{4}$.
En partant de R_2, la probabilité que les skieurs descendent directement au village est égale à $\frac{2}{3}$.



1. Compléter l'arbre représentant tous les trajets possibles du sommet S au village V.
2. **a.** Déterminer la probabilité P que les skieurs prennent un café au restaurant R_3, sachant qu'ils ont déjeuné ensemble au restaurant R_1.

   b. Déterminer la probabilité P_2 que les skieurs prennent un café au restaurant R_3.

   c. Déterminer la probabilité P_3 que les skieurs aient déjeuné au restaurant R_1, sachant qu'ils ont pris un café au restaurant R_3.
3. Les distances en kilomètres entre les différents points sont :
   $SR_1 = 5,\ SR_2 = 4,\ R_2R_3 = 4,\ 5, R_1R_3 = 4,\ R_3V = 2, R_1V = 5,\ 5,\ R_2V = 6$
   (cf. figure ci-dessus)
   Soit D la variable aléatoire représentant la distance parcourue par les skieurs pour aller du sommet S au village V.
   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire D.

EXERCICE III **6 points**

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les trois points non alignés A, B, C suivants, donnés par leurs coordonnées :

$$\text{A}(1~;~0~;~-1) \quad \text{B}(3~;~-1~;~2) \quad \text{C}(2~;~-2~;~-1),$$

et le point E de coordonnées : E$(4~;~-1~;~-2)$.

1. **a.** Montrer que la droite (CE) est orthogonale à la droite (AB) et à la droite (AC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A, B et C.

   c. Calculer la distance $d(\text{E}~;~\mathscr{P})$ du point E au plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AE).
3. On considère la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est :

$$\mathscr{D}: \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0\\ y &=& 2+t \\ z &=& -1+t\end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

4. **a.** Donner un point J et un vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ de $\mathscr{D}$.

b. Expliquer pourquoi la droite $\mathscr{D}$ est contenue dans le plan $\mathscr{P}$.

5. **a.** Déterminer le point M de $\mathscr{D}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{E}M}$ et $\overrightarrow{v}\,(0\,;\,1\,;\,1)$ soient orthogonaux.

b. En déduire la distance $d(E\,;\,\mathscr{D})$ du point E à la droite $\mathscr{D}$.