



Mise en œuvre d'une organisation mathématique pour le cycle 3 dans le REP+ La Rochelle Ouest

Octobre 2018, JN Bordeaux 2018

Matthieu Gaud

Enseignant au REP+ La Rochelle Ouest
IREM de Poitiers, groupe collège

Notre matinée

- Présentation générale
 - Partie institutionnelle
 - Partie historique et didactique
 - Partie pédagogique
- Mise en place sur une grandeur : les angles

Savoir-faire socio
grammaire D4 Suivre une démarche scientifique **CHAPITRE 11 Fractions** 176

J'apprends à... → **J'utilise le modèle**

Multiplier un nombre par une fraction

ÉNONCÉ Effectuer chacun des calculs suivants en choisissant la méthode la plus simple :

a) $24 \times \frac{5}{4}$ b) $8 \times \frac{12}{3}$ c) $7 \times \frac{5}{6}$

D4 Pour les exercices 1 à 5, effectuer chaque calcul en utilisant la méthode qui paraît la plus simple.

1 a) $\frac{2}{3} \times 15$ b) $\frac{42}{7} \times 11$ c) $8 \times \frac{3}{4}$

2 a) $\frac{4}{8} \times 6$ b) $\frac{5}{2} \times 36$ c) $13 \times \frac{70}{7}$

Savoir-faire, chapitre Fractions, p 176, Collection Phare 2016 Cycle 3, Hachette Education

« A quoi ça sert, m'sieur ?... »



En cette période d'élections, votez !

« C'est au programme (p 202). Et puis, tu en auras besoin en cycle 4 »

« Sans ça, tu n'aurais pas de pacemakers, de portables, de fusée Ariane... »

« *Les mathématiques ne sont pas, de manière évidente, utiles au citoyen ; cela devra être démontré.* » (Rapport Claude Tellot, 2004)

« *Les exercices proposés dans les classes contribuent à l'image négative d'une discipline ressentie comme uniquement scolaire et éloignée de la vie.* » (Rapport de l'I.G.E.N. de 2007)

« Par pitié cher élève, ne me pose pas cette question... »



Corpus de « *problèmes arithmétiques proposé en cycle 3 permettant d'enrichir le sens des opérations...* » (p 201)

Un propriétaire possède 45 moutons et un autre 36. Ils les font garder par un seul berger qu'ils nourrissent, et à qui ils donnent 225 fr. de gages par an. La dépense de chaque propriétaire doit être en rapport avec l'importance de son troupeau. On demande combien de jours chacun d'eux devra nourrir le berger et quelle somme il lui donnera. (*Certificat d'études primaires - Aveyron*)

Un marchand de bois de chauffage en a vendu 56 stères à raison de 19 fr. à un drapier pour être payé en marchandises pour une égale valeur. Celui-ci offre à son créancier de la toile à 2fr.10, du drap à 14 francs, et du calicot à 2fr.90 le mètre : combien devra-t-il donner de mètres de chaque étoffe ?

En donnant 21 bottes de foin par semaine pour 9 chevaux, un pré, dont chaque hectare en fournit 135 bottes, nourrirait 2 400 chevaux pendant 36 jours. On demande combien ce pré contient d'hectares ?

Un boucher a donné 49 kilos de viande à un boulanger, à 80 centimes le kilo, pour acquitter un mémoire de pain : on demande combien le boulanger lui avait fourni de kilos de pain, sachant qu'un kilo de viande vaut 2 kilos 5 hectogrammes de pain.

La place des grandeurs dans les différents cycles

INTRODUCTION INSTITUTIONNELLE

**Bulletin officiel spécial n° 11
du 26 novembre 2015**



Problématique (BO nov 2015)

CYCLE 3

Les spécificités du cycle de consolidation

Le cycle 3 relie désormais les deux dernières années de l'école primaire et la première année du collège, dans un souci renforcé de continuité pédagogique et de cohérence des apprentissages au service de l'acquisition du socle commun de connaissances, de compétences et de culture. Ce cycle a une double responsabilité : consolider les apprentissages fondamentaux qui ont été engagés au cycle 2 et qui conditionnent les apprentissages ultérieurs ; permettre une meilleure transition entre l'école primaire et le collège en assurant une continuité et une progressivité entre les trois années du cycle.

De manière plus générale au cycle 3, les élèves accèdent à une réflexion plus abstraite qui favorise le raisonnement et sa mise en œuvre dans des tâches complexes. Ils sont incités à agir de manière responsable et à coopérer à travers la réalisation de projets, à créer et à produire un nombre significatif d'écrits, à mener à bien des réalisations de tous ordres.

(Introduction sur le cycle de consolidation page 90)

Les cycles 2, 3, 4

Cycle 2 : page 73

Cycle 3 : page 198

Cycle 4 : page 367

Cycle 2	Nombres et calculs	Grandeurs et mesures	Espace et géométrie	
Cycle 3	Nombres et calculs	Grandeurs et mesures	Espace et géométrie	Initiation à la programmation
Cycle 4	Nombres et calculs	Grandeurs et mesures	Espace et géométrie	Algorithmique et programmation

Comment définiriez-vous les termes « grandeurs et mesures » ?
Comment définiriez-vous le terme de grandeur en mathématique ?

CYCLE 3

Dans la continuité des cycles précédents, le cycle 3 assure la poursuite du développement des six compétences majeures des mathématiques : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer. La résolution de problèmes constitue le centre principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui est garant de la sens. Si la modélisation algébrique relève avant tout de cycle 4 et du lycée, la résolution de problèmes permet déjà de montrer comment des notions mathématiques peuvent être des outils pertinents pour résoudre certains problèmes.

Les **activités** sur lesquelles portent les problèmes sont, le plus souvent, basées d'autres enseignements, de la vie de classe ou de la vie courante. Les élèves fréquentent également des problèmes issus d'un contexte interne aux mathématiques. La mise en perspective historique de certaines connaissances (numération de position, apparition des nombres décimaux, du système métrique, etc.) contribue à enrichir la culture scientifique des élèves.

Le cycle 3 vise à approfondir des notions mathématiques abordées au cycle 2, à en étendre le domaine d'étude, à consolider l'automatisation des techniques de calcul instrumentales, notamment l'écriture, et à développer la maîtrise de ces techniques. La mise en perspective historique de certaines connaissances (numération de position, apparition des nombres décimaux, du système métrique, etc.) contribue à enrichir la culture scientifique des élèves.

Les activités géométriques proposées au cycle 3 s'inscrivent dans la continuité de celles fréquentées au cycle 2. Elles s'en distinguent par une part plus grande accordée au raisonnement et à l'argumentation qui **favorise** la perception et l'usage des instruments. Elles sont aussi une occasion de fréquenter de nouvelles représentations de l'espace (plans, perspectives, vues de face, de côté, de dessus, ...).

Le développement de l'espace de travail, du travail en groupe et de la mobilisation d'objets concrets, les outils numériques sont encouragés.

NOMBRES ET CALCUL

Au cycle 3, l'étude des grands nombres permet d'enrichir la compréhension de notre système de numération (numération orale et numération écrite) et de mobiliser ses propriétés lors de calculs.

Les fractions plus ou moins décimales apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel. Avoir une bonne compréhension des relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) permet de les prolonger aux dizaines, centaines, ... Les caractéristiques communes entre le système de numération et le système métrique sont mises en évidence. L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. Cela permet de mettre à jour la nature des nombres décimaux et de justifier les règles de comparaison (qui se différencient de celles mises en œuvre pour les entiers) et de calcul.

Le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté sont à construire en interaction. Ainsi, le calcul mental est mobilisé dans le calcul posé et il peut être utilisé pour fournir un ordre de grandeur avant un calcul instrumenté. Réciproquement, le calcul instrumenté permet de vérifier un résultat obtenu par le calcul mental ou par le calcul posé. Le calcul, dans toutes ses modalités, contribue à la connaissance des nombres. Ainsi, même si le calcul mental permet de produire des résultats utiles dans différents contextes (notamment la vie courante, les situations sportives, les problèmes de numération des nombres et des propriétés des opérations, il s'agit d'amener les élèves à s'adapter en accordant la priorité la plus efficace à fonction de leurs connaissances mais aussi et surtout en fonction des nombres et des opérations mis en jeu dans les calculs. Pour cela, il est indispensable que les élèves puissent s'appuyer sur l'affinement de faits numériques mémorisés et de modules de calcul élémentaires automatisés. De même, si la maîtrise des techniques opératoires écrites permet à l'élève d'obtenir un résultat de calcul, la construction de ces techniques est l'occasion de retrouver les propriétés de la numération et de rencontrer des exemples d'algorithmes complexes.

Les problèmes arithmétiques proposés au cycle 3 permettent d'enrichir le sens des opérations déjà abordées au cycle 2 et d'en étudier de nouvelles. Les procédures de traitement de ces problèmes peuvent évoluer en fonction des nombres mis en jeu et de leur structure. Le calcul contribuant aussi à la représentation des problèmes, il s'agit de développer simultanément chez les élèves des

<ul style="list-style-type: none"> Spécificités des nombres décimaux. Au cycle 3, l'étude des grands nombres permet d'enrichir la compréhension de notre système de numération (numération orale et numération écrite) et de mobiliser ses propriétés lors de calculs. Les fractions plus ou moins décimales apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel. Avoir une bonne compréhension des relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) permet de les prolonger aux dizaines, centaines, ... Les caractéristiques communes entre le système de numération et le système métrique sont mises en évidence. L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. Cela permet de mettre à jour la nature des nombres décimaux et de justifier les règles de comparaison (qui se différencient de celles mises en œuvre pour les entiers) et de calcul. 	<ul style="list-style-type: none"> Utiliser des nombres décimaux pour rendre compte de partage de grandeurs ou de mesures de grandeurs dans des cas simples. Utiliser différentes représentations : mesures de longueur et aires, une unité écart choisie. De faire le lien entre les unités de numération et les unités de mesure (kilomètre/décimètre, centimètre/millimètre, etc.). La demi-droite numérique graduée est l'occasion de mettre en évidence des agrandissements successifs de la graduation de 1/10 ou 1/100.
--	---

Compétences et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Mémoriser des faits numériques et des procédures élémentaires de calcul. Elaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit. Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.	Exemples de faits et procédures numériques : • multiplier ou diviser par 10, par 100, par 1000 un nombre décimal ; • rechercher le complément à l'unité, à la dizaine, à la centaine supérieure ; • encadrer un nombre entre deux multiples consécutifs ; • trouver un quotient, un reste.
• Addition, soustraction, multiplication, division. • Propriétés des opérations : $(a+b)+c=a+(b+c)$; $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	• multiplier par 5, par 25, par 50, par 100, par 0,1, par 0,5 ...

- addition et soustraction pour les nombres décimaux des le CM1,
- multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier au CM2, de deux nombres décimaux en 6e,
- division euclidienne dès le début de cycle, division de deux nombres entiers avec quotient décimal, division d'un nombre décimal par un nombre entier à partir du CM2.

La résolution de problèmes : la progressivité sur la résolution de problèmes, outre la structure thématique du problème, repose notamment sur :

- les nombres mis en jeu : entiers (tout au long du cycle) puis décimaux,
- le nombre d'étapes de calcul et la détermination ou non de ces étapes par les élèves : on passe de problèmes dont la solution engage une démarche à une ou plusieurs étapes indiquées dans l'énoncé pour aboutir en 6e à des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche,
- les supports envisagés pour la prise d'informations : la collecte des informations utiles peut se faire à partir d'un support unique en CM1 (texte ou tableau ou représentation graphique) puis à partir de deux supports complémentaires pour aller vers des tâches complexes mêlant plusieurs supports en 6e. La communication de la démarche et des résultats prend différentes formes et s'enrichit au cours du cycle. Dès le début du cycle, les problèmes proposés, relevant des quatre opérations, l'objectif est d'automatiser la reconnaissance de l'opération en fin de cycle 3.

Grandeurs et mesures

Au cycle 3, les connaissances des grandeurs déjà fréquentées au cycle 2 (longueur, masse, contenance, durée, prix) sont complétées et structurées, en particulier à travers la maîtrise des unités légales du système international d'unités (numération décimale ou sexagésimale) et de leurs relations. Un des enjeux est d'enrichir la notion de grandeur en abordant la notion d'aire d'une surface et en la distinguant clairement de celle de périmètre. Les élèves approchent la notion d'angle et se familiarisent avec la notion de volume en tant que tout d'abord à celle de contenance.

Le nombre de mesures d'une grandeur, mesurée à l'aide d'une unité donnée, est le rapport de la grandeur mesurée sur l'unité.

Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux

Composer, décomposer les grands nombres entiers, en utilisant des regroupements par milliers.

» Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et leurs relations.

Comprendre et appliquer les règles de la numération aux grands nombres (jusqu'à 12 chiffres).

Composer, ranger, encadrer des grands nombres entiers, les repérer et les placer sur une demi-droite graduée adaptée.

volume d'un pavé droit. On relie alors les unités de volume et de contenance (1 L = 1 dm³ ; 1 000 L = 1 m³).

Les angles : Au primaire, il s'agit d'estimer et de vérifier, en utilisant l'équerre si nécessaire, qu'un angle est droit, aigu ou obtus, de composer les angles d'une figure puis de reproduire un angle, en utilisant un gabarit. Ce travail est poursuivi au collège, où l'on introduit une unité de mesure des angles et l'utilisation d'un outil de mesure (le rapporteur).

Espace et géométrie

À l'articulation de l'école primaire et du collège, le cycle 3 constitue une étape importante dans l'approche des concepts géométriques. Prolongeant le travail amorcé au cycle 2, les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets (le carré, la droite, le cube, etc.) et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par le recours à des instruments, par l'exploitation de propriétés pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur le raisonnement et l'argumentation. Différentes caractéristiques d'un même objet ou d'une même notion s'enrichissant mutuellement permettent aux élèves de passer du regard ordinaire porté sur un dessin au regard géométrique porté sur une figure.

Les **activités** (travaux appelés à différents types de tâches (reconnaitre, nommer, comparer, vérifier, décrire, reproduire, représenter, construire) portant sur des objets géométriques, sont privilégiées afin de faire émerger des concepts géométriques (caractérisation et propriétés des objets, relations entre les objets) et de les enrichir. On joue sur les contraintes de la **représentation** sur les supports et les instruments mis à disposition des élèves, permet une évolution des procédures de traitement des problèmes et un enrichissement des connaissances.

Les professeurs visent à utiliser un langage précis et adapté pour décrire les actions et les gestes réalisés par les élèves (plages, tracés à main levée ou avec utilisation de gabarits et d'instruments exacts ou lors de l'utilisation de logiciels). Ceux-ci sont progressivement encouragés à utiliser ce langage.

Les activités spatiales et géométriques sont à mettre en lien avec les deux autres thèmes : résoudre dans un autre cadre des problèmes relevant de la proportionnalité ; utiliser en **numérique** les grandeurs (géométriques) et leur mesure. Par ailleurs, elles constituent des moments privilégiés pour une première initiation à la programmation notamment à travers la programmation de déplacements de la construction de figures.

<ul style="list-style-type: none"> parallélogramme <ul style="list-style-type: none"> ceux (comme ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné). Vocabulaire approprié pour nommer les solides : pavé droit, cube, prisme droit, pyramide régulière, cylindre, cône, balle. 	<ul style="list-style-type: none"> solnet, angle, demi-droite, segment, cercle, rayon, diamètre, milieu, médiatrice, hauteur, etc.) sont introduits et utilisés en contexte pour en préciser le sens ; jeu du portrait, échange de messages, jeux d'association (figures, dénominations, propriétés, représentations).
<ul style="list-style-type: none"> reproduire, représenter, construire : <ul style="list-style-type: none"> des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) des solides simples ou des assemblages de solides simples (sans forme de maquettes ou de dessins ou à partir d'un patron (dessin, dans le cas d'un prisme ou d'une pyramide, ou à construire dans le cas d'un pavé droit). 	<ul style="list-style-type: none"> réaliser, compiler et réguler un programme de construction. réaliser une figure simple ou une figure complexe de figures simples à l'aide d'un logiciel.

Reconstruire et utiliser quelques relations géométriques	Reconstruire et utiliser quelques relations géométriques
Effectuer des tracés correspondant à des relations de perpendicularité ou de parallélisme de droites et de segments, par exemple pour la symétrie axiale, passer du pliage au de l'utilisation de papier calque à la construction du symétrique d'un point par rapport à une droite à l'équerre ou au compas.	Reconstruire conduisant les élèves à utiliser des techniques qui évoluent en fonction des supports et des instruments choisis ; par exemple pour la symétrie axiale, passer du pliage au de l'utilisation de papier calque à la construction du symétrique d'un point par rapport à une droite à l'équerre ou au compas.
Effectuer des tracés de parallélisme (en lien avec la notion d'alignement).	Effectuer des tracés de parallélisme (en lien avec la notion d'alignement).
Déterminer le plus court chemin entre un point et une droite ou entre deux droites parallèles (en lien avec la notion d'alignement).	Déterminer le plus court chemin entre un point et une droite ou entre deux droites parallèles (en lien avec la notion d'alignement).
Effectuer des tracés de perpendicularité (en lien avec la notion d'alignement).	Effectuer des tracés de perpendicularité (en lien avec la notion d'alignement).
Effectuer des tracés de perpendicularité (en lien avec la notion d'alignement).	Effectuer des tracés de perpendicularité (en lien avec la notion d'alignement).

- La progressivité s'organise en prenant en compte :
- les genres de géométrie : certaines compétences de construction, comme tracer un segment d'une longueur donnée ou reporter la longueur d'un segment (CM1-CM2) ou encore reproduire un angle (6e) sont mêlées conjointement avec les apprentissages du domaine « grandeurs et mesures ».
 - l'évolution des procédures et de la qualité des connaissances mobilisées : ainsi, l'élève doit tout d'abord savoir reconnaître un carré en prenant en compte la perpendicularité et l'égalité des mesures des côtés (CM1-CM2) puis progressivement de le tracer ou l'inscrire dans un carré à partir des propriétés de ses diagonales ou de ses axes de symétrie (6e).
 - les objets géométriques fréquents.
 - la maîtrise de nouvelles techniques de tracé (par rapport au cycle 2).

Résoudre des problèmes de comparaison avec et sans recours à la mesure.	Reconstruire amenant les élèves à compléter les unités de grandeur (longueur, masse, contenance, durée) et à mettre en évidence les relations entre elles
Calculer des aires (carrés, des aires ou des volumes, en mobilisant ou non, selon les cas, des formules.	
Calculer la durée écoulée entre deux instants donnés.	Utiliser les unités de mesure des durées et leurs relations.
Déterminer un instant à partir de la connaissance d'un instant d'une durée.	Tableaux d'horaires de réservation de transport.
Calculer la durée écoulée entre deux instants donnés.	Tableaux d'horaires de marchés, d'activités sportives, secondaires, diennes de seconde, mois, années, siècles, millénaires.
Calculer la durée écoulée entre deux instants donnés.	Programmes de cinéma, de théâtre.
Calculer la durée écoulée entre deux instants donnés.	Programmes télévisés.
Calculer la durée écoulée entre deux instants donnés.	Ces différentes ressources sont utilisées sur un support papier ou un support numérique en ligne.
Calculer la durée écoulée entre deux instants donnés.	Comparer distance parcourue et temps écoulé, quantité d'énergie consommée et distance parcourue, quantité de liquide écoulée et temps écoulé, etc.
Calculer la durée écoulée entre deux instants donnés.	

Représentation	Représentation
Identifier avec numérique la proportionnalité entre deux grandeurs	
Identifier avec numérique des variations entre deux grandeurs	

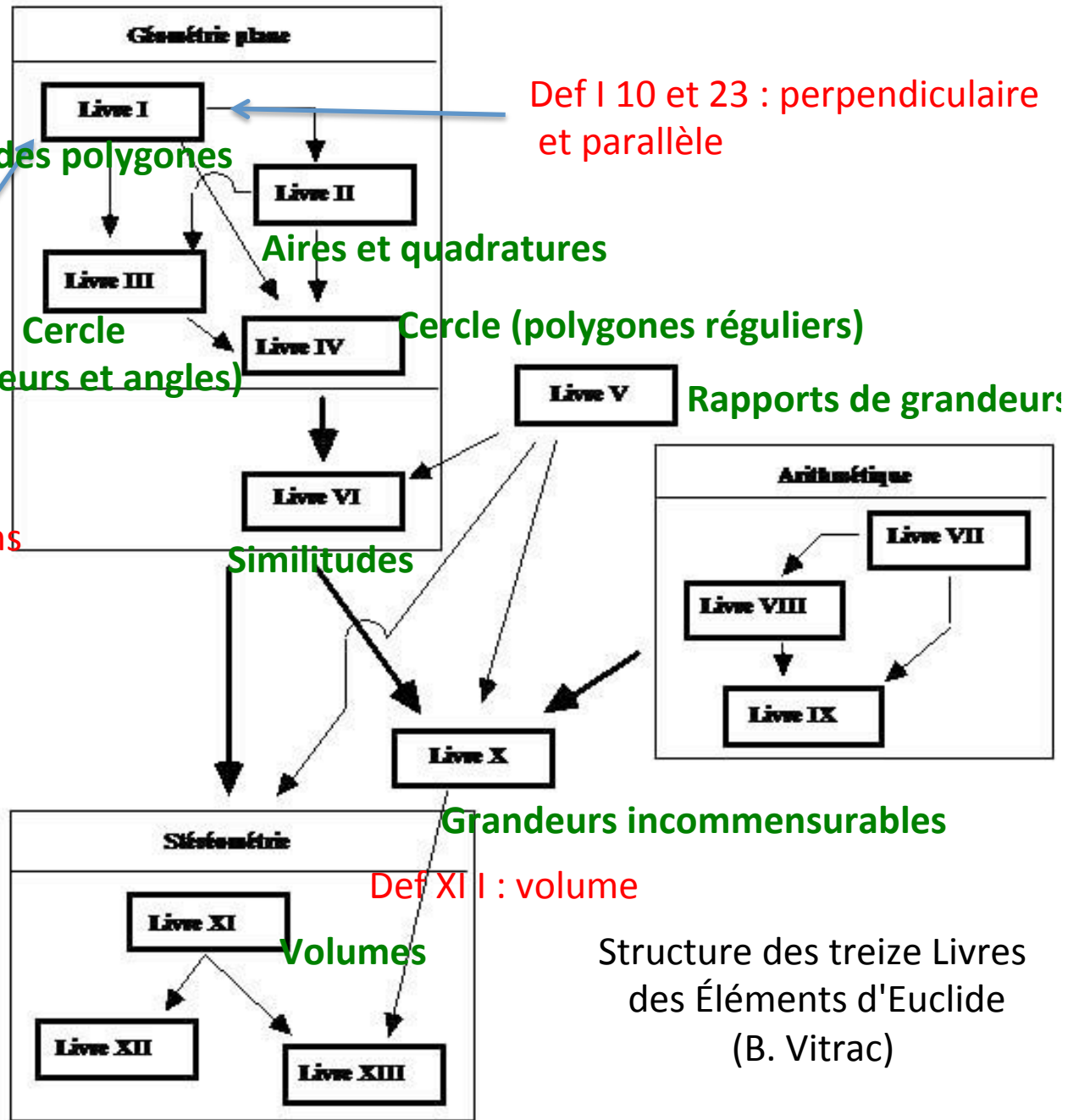
D'Euclide à Chevallard

RAPPEL SUR LA NOTION DE GRANDEUR



Les grandeurs ?

- « Euclide ne définit pas précisément ce qu'il entend par grandeur. La théorie construite ne dépend pas du genre particulier des grandeurs considérées, qui peuvent être des longueurs, des surfaces, des poids, etc., et c'est ce qui en assure l'universalité.
- Des grandeurs homogènes, c'est-à-dire du même genre, peuvent s'ajouter et se comparer. Les "notions communes" fixent les règles opératoires : si $A = C$ et $B = C$, alors $A = B$; si $A = B$, alors $A + C = B + C$; si $A = B$, alors $2A = 2B$, etc. »
- Durées, Angles, Longueurs, Aires, Volumes, Prix, Populations
- Températures ?



Programmes du cycle 1
(p 13, BO Spé n°2
du 26 mars 2015)

Structure des treize Livres
des Éléments d'Euclide
(B. Vitrac)

D'Euclide à Viète, Descartes, Clairaut



[Extrait du site de l'Académie des Sciences sur le tricentenaire de Clairaut](#)

Objectif :

construire toute la géométrie plane à partir du problème de la mesure des terrains,
et la géométrie dans l'espace à partir de la mesure des solides.

Contrainte : partir de la géométrie naturelle, compréhensible par les « commençants »

Elémens de géométrie (1741), d'Alexis Clairaut

PREMIERE PARTIE (pages 1 à 72)

Des moyens qu'il était le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.

DEUXIEME PARTIE (pages 73 à 102)

De la méthode géométrique de comparer des figures rectilignes.

TROISIEME PARTIE (pages 103 à 144)

De la mesure des figures circulaires et de leurs propriétés.

QUATRIEME PARTIE (pages 145 à 215)

De la manière de mesurer les solides et leurs surfaces





Décadence des grandeurs : le passage à l'axiomatisation à la fin du XIXe siècle et à la notion de structure

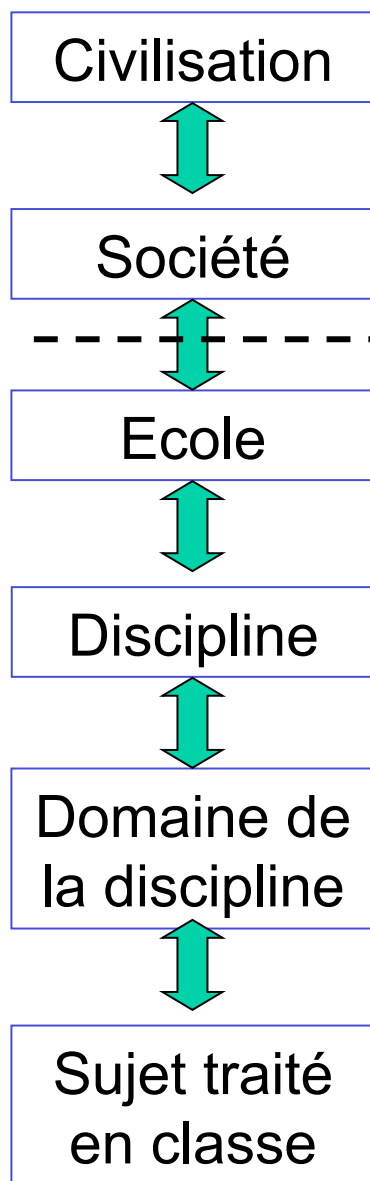
- Les premiers efforts pour rapprocher l'Arithmétique de l'Analyse portèrent d'abord sur les nombres rationnels et sont dus à Martin Ohm (1822) ; ils furent repris par plusieurs auteurs, notamment Grassmann, Hankel et Weierstrass (dans ses cours non publiés) ; c'est à ce dernier que paraît due l'idée d'obtenir un "modèle" des nombres rationnels positifs ou des nombres entiers négatifs en considérant des classes de couples d'entiers naturels.
- Hankel (en 1867), inaugurant l'axiomatisation de l'algèbre, défend une mathématique « *purement intellectuelle, une pure théorie des formes, qui a pour objet, non la combinaison des grandeurs, ou de leurs images, les nombres, mais des choses de la pensée auxquelles il peut correspondre des objets ou des relations effectives, bien qu'une telle correspondance ne soit pas nécessaire.* »
- Vers 1870, il était devenu urgent, vu la nécessité, après la découverte des phénomènes "pathologiques" en Analyse, d'éliminer toute trace d'intuition géométrique et de la notion vague de "grandeur" dans la définition des nombres réels.

Eléments d'histoire des mathématiques de Bourbaki, Masson, 1984.



Un retour progressif des grandeurs, en liaison avec l'algèbre linéaire

- Publication en 1968 par H. Whitney dans *The American Mathematical Monthly*, de deux articles :
 - – le premier propose une théorie dans laquelle la notion de grandeur est construite en parallèle avec la construction des rationnels et des réels.
 - – le deuxième propose une théorie de l'algèbre des grandeurs, modélisant mathématiquement ce qu'il est courant d'appeler "l'analyse dimensionnelle".
- Il justifie mathématiquement les pratiques de calculs sur les grandeurs : calcul avec unités, et calcul en "oubliant" les unités, les inconvénients de ce dernier étant soulignés.
- Voir les articles de Chevallard et Bosch sur les grandeurs dans les numéros 55 et 59 de *Petit x*.



« Ce n'est pas la société qui se sépare de l'école mais l'école qui se sépare de la société ».



Les sujets traités en classe sont-ils pour les élèves, le système éducatif et les citoyens, reliés aux sociétés actuelles ou à notre civilisation ?



Les grandeurs en mathématiques au collège - Y. Chevallard et M. Bosch - 2001

LES GRANDEURS EN MATHÉMATIQUES AU COLLÈGE

Partie I. Une Atlantide oubliée

Yves CHEVALLARD
IUFM d'Aix-Marseille

Marianna BOSCH
Université Ramon Llull, Barcelone.

Résumé. Cette étude en deux parties aborde la question de la place et du statut des grandeurs au collège. Dans cette première partie, on examine notamment le problème des unités et des changements d'unités.

1. Les grandeurs dans les textes officiels

1.1. Une mention insistante

Le mot de *grandeur* est discrètement présent tout au long des programmes de mathématiques du collège. Dès le texte de présentation générale qui précède le programme de 6^e, il apparaît dans la formulation de l'un des quatre objectifs assignés au domaine d'études intitulé *Organisation et gestion de données, Fonctions* : « se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées) ». Symétriquement, à la suite du programme de 3^e, la notion de grandeur structure en partie le tableau synoptique qui récapitule l'ensemble des programmes du collège, y découpe sept grands secteurs d'études. Le troisième de ces secteurs s'intitule *Grandeurs et mesures* : on a reproduit ci-après la partie du tableau qui s'y rapporte.

- Travailler **avec** les grandeurs et non **sur** les grandeurs

LA PLACE DES GRANDEURS DANS LES CYCLES

	Cycle 1	Cycle 2	Cycle 3	Cycle 4
Population	Constituer des collections ? Comparer ?	Calculer le cardinal d'un ensemble		
Longueur	Distinguer les longueurs, des masses, des volumes (appelé contenance)	Comparer ? Estimer les ordres de grandeurs ? Introduction des unités Mesurer par report ou comptage d'unité élémentaire	Préfixes (milli à kilo) Comparer avec ou sans mesure Mesurer des périmètres Formules Utiliser des instruments Notion de distance	Longueurs en fonction d'une autre grandeur Comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction Grandeurs quotient et grandeurs produits
Masse	Distinguer les longueurs, des masses, des volumes (appelé contenance)	Comparer ? Estimer les ordres de grandeurs ? Introduction des unités. Mesurer par report ou comptage d'unité élémentaire	Préfixes (milli à kilo)	Débit : masse/durée Grandeurs quotient et grandeurs produits
Volume	<i>Contenance</i> Distinguer des longueurs et masses	<i>Capacité</i> Comparer ? Estimer les ordres de grandeurs ? Introduction des unités Mesurer par report ou comptage d'unité élémentaire	Introduction des unités Préfixes (milli à kilo) Relier volume et contenance. Estimer mesure d'un volume par différentes procédures Déterminer le volume d'un pavé droit, formules	Débit : volume/durée Formule donnant le volume d'une pyramide, d'un cylindre, d'un cône ou d'une boule. Comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction
Durée		Comparer, mesurer, estimer Introduction des unités Mesurer par report ou comptage d'unité élémentaire	Calculer la durée entre deux instants Déterminer un instant à partir de la connaissance d'un instant et d'une durée.	Grandeurs quotient et grandeurs produits
Prix		Introduction des unités Mesurer par report ou comptage d'unité élémentaire	Préfixes (milli à kilo) Principe d'utilisation de la monnaie Connaître le prix de quelques objets familiers.	Grandeurs quotient et grandeurs produits
Aire			Introduction des unités Préfixes (milli à kilo) Comparer, classer, ranger des surfaces. Différencier aires et périmètre. Déterminer et estimer l'aire avec ou sans formules	Comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction Grandeurs quotient et grandeurs produits
Angle			Introduction des unités. Comparer, reproduire, additionner, multiplier	Comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction Grandeurs quotient et grandeurs produits

Le paradoxe actuel

Un travail spécifique sur certaines grandeurs, comme les longueurs, les aires ou les volumes, est nécessaire pour mettre en valeur les concepts sous-jacents et donner sens aux formules qui permettent d'en calculer des mesures. Il est important pour le professeur de distinguer les notions de grandeur et de mesure et de faire vivre les deux aspects auprès des élèves sans formalisme excessif.

Le traitement de situations concrètes pourrait faire penser que l'enseignement des grandeurs et des mesures est aisé mais les résultats des évaluations réalisées par la DEPP montrent qu'il en n'est rien. Ces difficultés ne sont en général pas de l'ordre de l'erreur de formule ou d'unité mais bien d'une difficulté de compréhension du concept initial.

Doc d'accom. Gr et Me Cycle 4

- Aire = périmètre
- Pas d'unité pertinente
- Pas d'acquisition des grandeurs usuelles

← Rapports sur Cèdre 2014 et Pisa

La démarche de l'IREM de Poitiers

ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES PAR LES GRANDEURS



Notre démarche dans les cycles

Les mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs ; par exemple les distances, les surfaces, les vitesses, etc. (Bossut, 1784)

L'oubli de la notion de grandeur ferme les mathématiques sur elles-mêmes. En sens inverse, l'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématique de la diversité du monde. L'introduction mathématique au monde qui nous entoure suppose donc prise de contact et familiarisation avec l'univers des grandeurs. (Chevallard, Bosch, 2002)

Notre démarche : **motiver** et **structurer** cet enseignement



Notre démarche dans les cycles

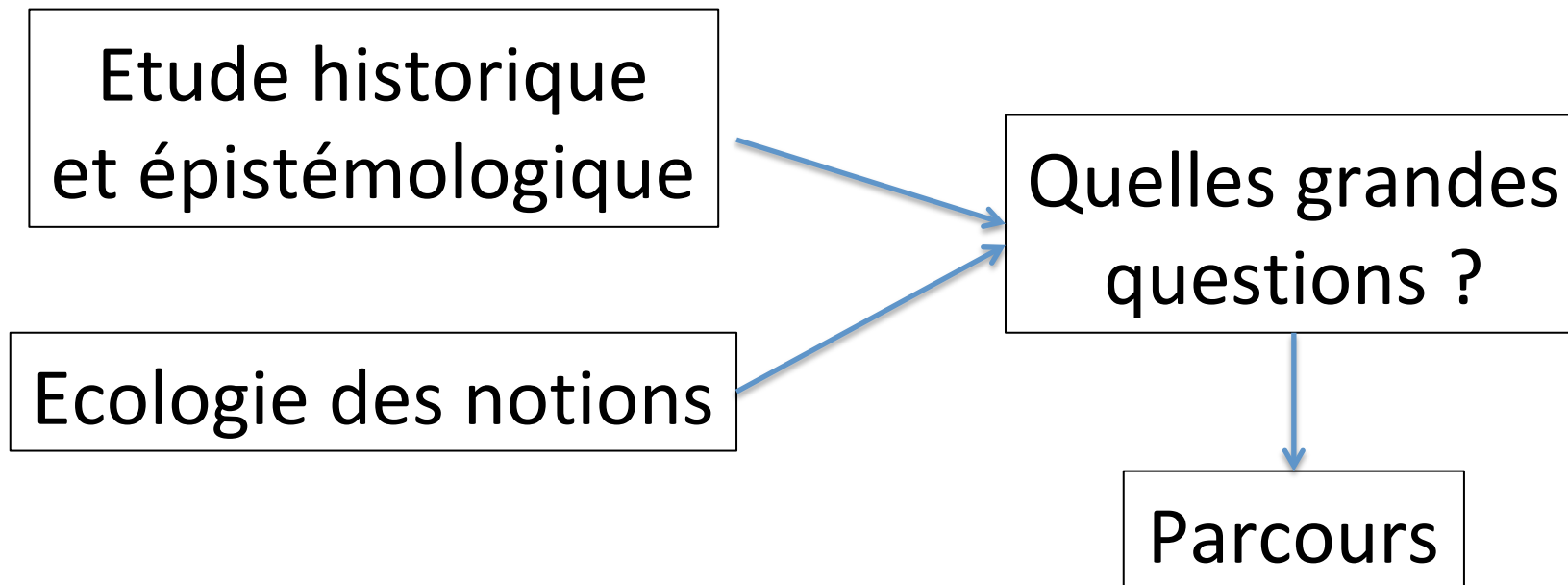
- Poursuite du lien entre les maths et « Questionner le monde » du cycle 2
- Changement radical :

~~entrée par l'étude de deux domaines mathématiques (les nombres et la géométrie)~~

↓
entrée par les grandeurs pour construire ces deux domaines

De la théorie à la pratique

- Organiser son enseignement autour de **grandes questions (QFPG)**



Les grandes questions

- **mesurer** des longueurs, des angles, pour calculer des trajets, des longueurs inaccessibles, pour dresser des plans, pour s'orienter
- **partager** des longueurs ou des angles pour construire des instruments de mesure
- **calculer** des longueurs pour clôturer des propriétés, planter des haies, prévoir des coûts de matériaux vendus au mètre, pour construire des figures
- **comparer ou partager** des surfaces agricoles pour les échanger, les acheter, les vendre
- **comparer ou évaluer** des aires à partir de figures à l'échelle, à partir d'un plan, de photos aériennes (Google Earth, IGN, ..), à partir d'un schéma
- **calculer** une aire pour estimer une quantité de peinture, de semence, de tuiles, de carrelage, de papier pour un patron ou encore pour déterminer un prix (terrain à bâtir, crépi d'une maison...)
- **calculer** des volumes pour le transport de marchandises, pour fabriquer des solides de volume donné (emballages, cuves,...)
- **dénombrer** des segments dans des configurations planes (compter le nombre d'arêtes, course de taxi dans une ville...)
- **repérer** l'épicentre d'un séisme, déterminer les zones blanches en téléphonie mobile
- **étudier la variation en fonction de** (les prix en fonction des distances, les prix en fonction des durées, les prix en fonction des prix...)

Enseigner les mathématiques par les grandeurs en cycles 2, 3, 4

EXEMPLE D'UNE DÉMARCHE



Sommaire

- Présentation
- Problématique
- Réponses apportées et abordées dans le REP+
- Pas de conclusion mais échange

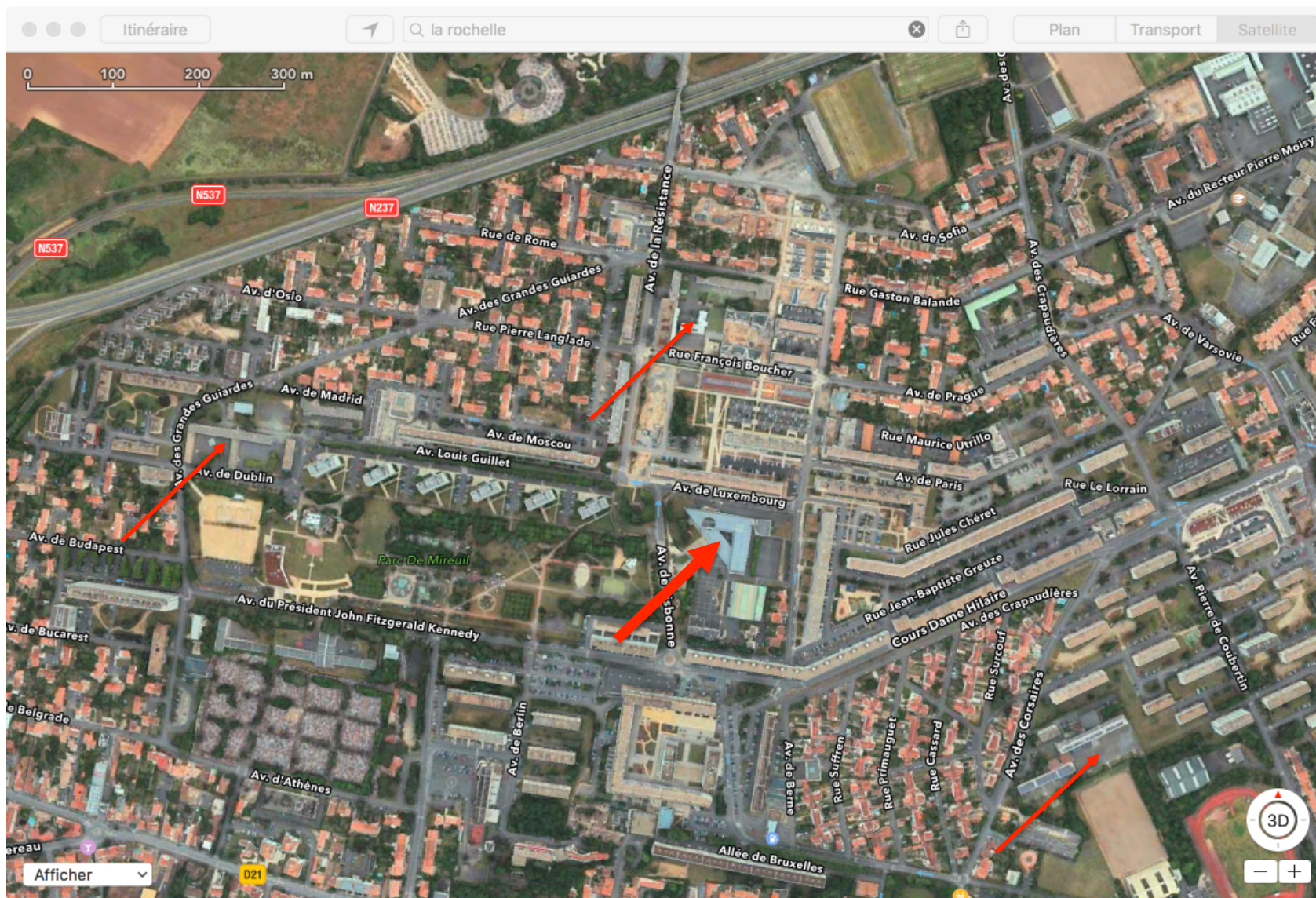
Article au CARDIE, rédigé par Laure Amussat,
suite à une observation dans la classe d'Aude Gandais.

<http://ww2.ac-poitiers.fr/meip/spip.php?article346>



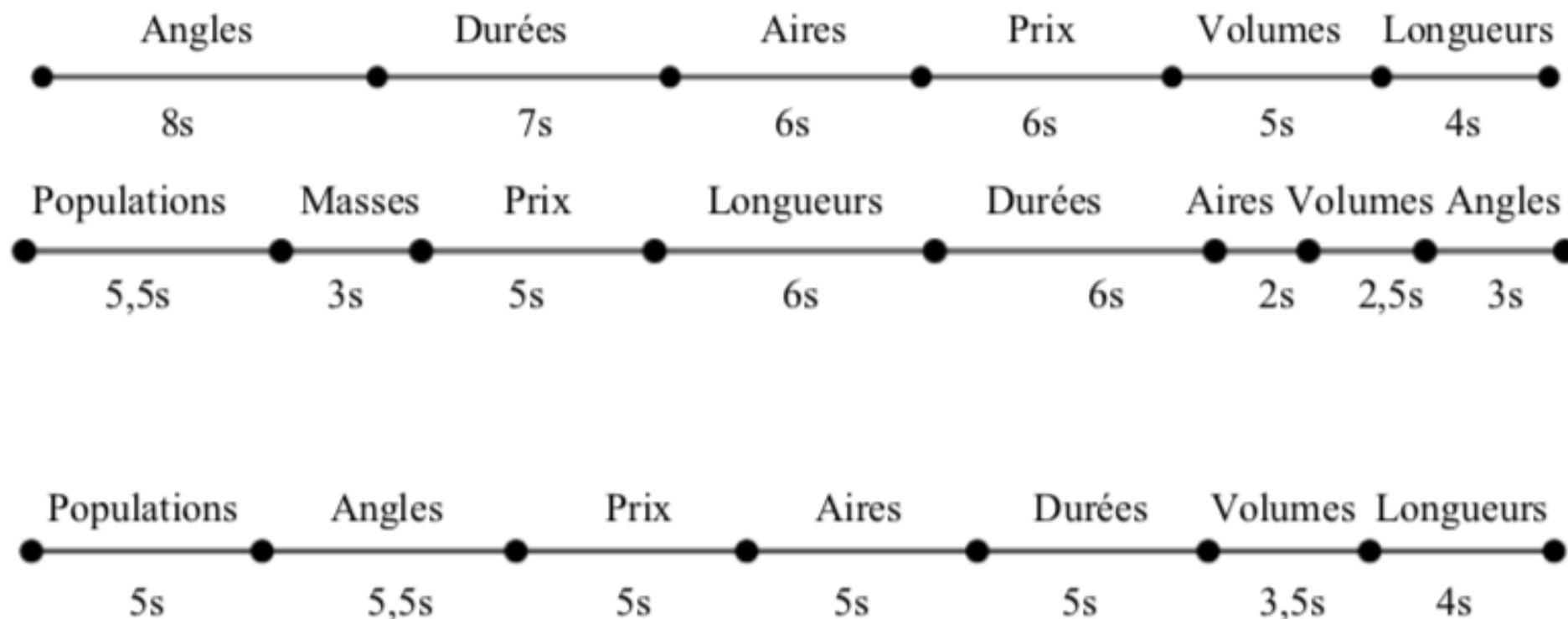
Présentation

REP + La Rochelle Ouest :
Collège Pierre Mendès France (125 élèves par niveaux)
3 écoles





Les grandeurs au cycle 3



Déroulement hebdomadaire de séances de calcul mental (basées sur les grandeurs)



Approche de l'IREM par les grandeurs autour de grandes questions

CM1 CM2	<ol style="list-style-type: none">1. Comment définir la grandeur ?2. Comment comparer des grandeurs ? (comparaison absolue et relative)3. Comment additionner et soustraire des grandeurs ?4. Comment multiplier et diviser ?	Cycle 3
6 ^{ème}	<ol style="list-style-type: none">1. Comment comparer des grandeurs ? (comparaison absolue et relative)2. Comment additionner et soustraire des grandeurs ?3. Comment multiplier et diviser ?4. Comment mesurer ?5. Comment calculer une grandeur ?	
5 ^{ème}	<ol style="list-style-type: none">1. Comment comparer ?2. Comment partager ?3. Comment mesurer ?4. Comment calculer ?5. Comment varie la grandeur ?6. Comment se repérer ?7. Comment dénombrer ?8. Comment construire une figure, un objet ?	Cycle 4
4 ^{ème}		
3 ^{ème}		



Exemple d'une séance de calcul mental (niveau CM2)

1

Calcul mental

Pour chaque question, écris ta réponse sur ton cahier après avoir bien lu ce qui est demandé.

2

Question 1

$$3\,500\text{ m} + 4\,500\text{ m}$$

3

Question 2

$$50\,203\text{ km} + 3\,712\text{ km}$$

4

Question 3

Qu'est-ce qui est le plus grand :
 $6 \times 6\text{ m}$ ou $5 \times 7\text{ m}$?

5

Question 4

La moitié de 24 km

6

Question 5

4 enfants se sont partagé équitablement un rouleau de réglisse. Chacun en a 150 mm .
Quelle était la longueur de ce rouleau de réglisse?



Exemple de déroulement : les durées au cycle 3

- Comment appréhender les durées ?
- Comment s'approprier les durées ?
- Comment comparer des grandeurs ?
(comparaison absolue et relative)
- Comment additionner et soustraire des grandeurs ?
- Comment multiplier et diviser ?
- Comment mesurer ?
- Comment calculer une grandeur ?



Exemple 2

LES ANGLES AU CYCLE 3

Comment définir les angles ?

« Jaune, Rouge, Bleu » de Vassily Kandinsky

Voici le tableau d'un peintre célèbre Vassily Kandinsky mais une partie de ce tableau a été découpée.



Il faut produire une pièce pouvant parfaitement s'insérer dans le trou afin de pouvoir compléter ce tableau.

Indications

Cette situation amène les élèves à identifier les angles de la figure, et à trouver un moyen de les reproduire (calque, gabarit, ...). À partir de là une définition de l'angle peut s'élaborer. Voir un compte rendu d'expérimentation et une fiche de séance dans la Partie 4.

Source : Wikipédia

Les allées du parc de Mireuil



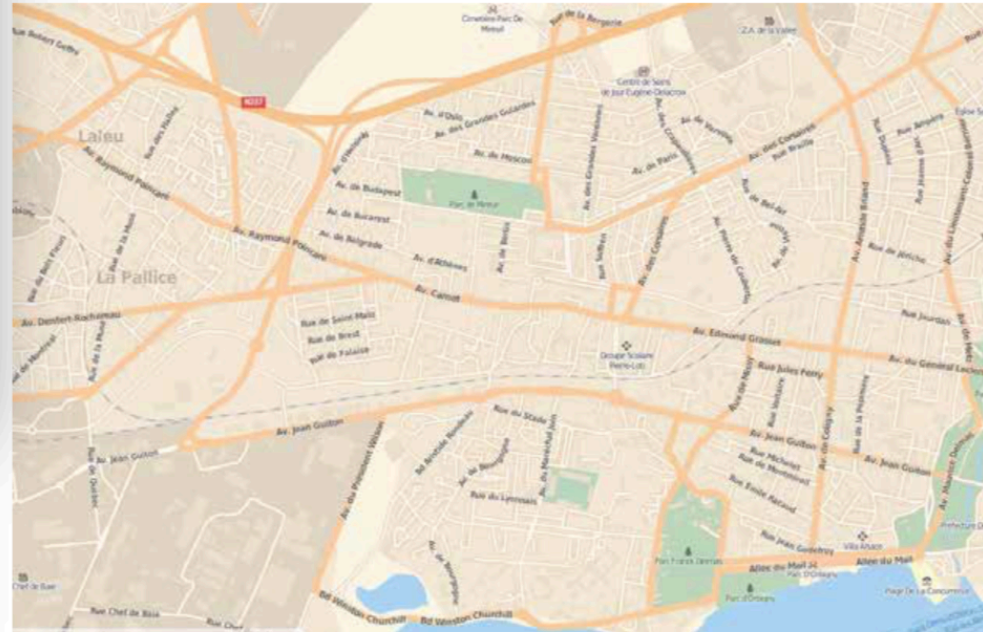
Peux-tu indiquer sur le plan du parc de Mireuil les angles que font les allées ?

Lesquels sont des angles droits ?

Indications

Identification d'angles à l'intersection de droites et demi droites, codage. Nécessité de nommer des angles ayant même sommet.

À l'angle de la rue



1) Une banque se trouve à l'angle des avenues Coligny et Guiton. Peux-tu la situer sur le plan ?

Variante

Quelqu'un me dit que la BNP se trouve à l'angle des avenues Coligny et Guiton. Un autre que le Marigny se trouve à l'angle des avenues Coligny et Guiton. Un troisième me dit qu'il y a une boucherie à l'angle des avenues Coligny et Guiton. Est-ce possible ?

2) L'arrêt « Missy » du bus 1 (direction centre ville) se trouve à l'angle de la rue de Missy et de l'avenue Edmond Grasset. Peux-tu le situer sur le plan ?

3) Un pressing se trouve à l'angle de l'avenue Guiton et du boulevard Aristide Rondeau. Peux-tu le situer sur le plan ? Et en face, à l'angle de l'avenue Guiton et de la rue du stade, il y a une agence pour l'emploi. Peux-tu la situer ?

4) À situer sur le plan :

- la boulangerie qui est à l'angle des avenues Raymond Poincaré et Denfert Rochereau ;
- la pizzeria qui est à l'angle des avenues Carnot et Denfert Rochereau.

Avec un plan du quartier, ou sur Google Earth (Mireuil-La Rochelle)

1) L'école des Grandes Varennes se trouve à l'angle de la rue Pierre Langlade et de l'avenue de la Résistance. Que peux-tu dire de l'angle de ces deux rues ? Où se trouve l'école ?

2) J'habite à l'angle de la rue Paul Bourget et de l'avenue d'Oslo ? Peux-tu trouver ma maison ?

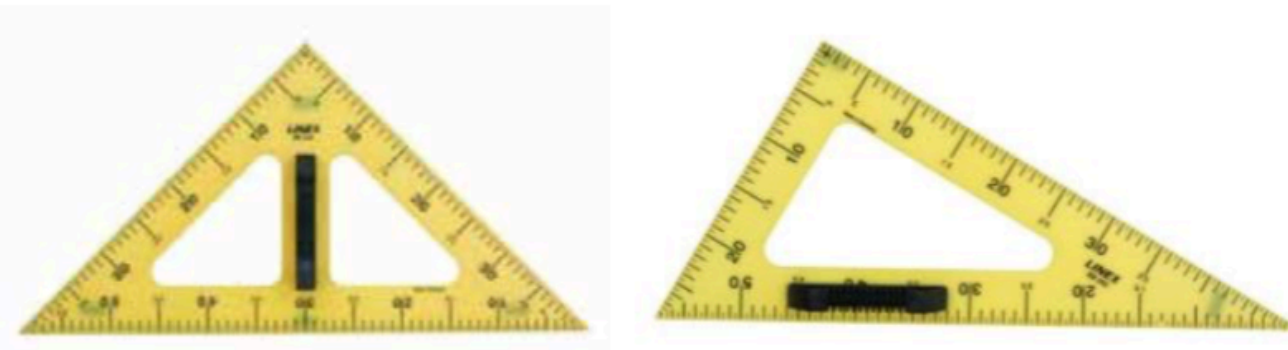
3) J'habite à l'angle de la rue de Tourville et de la rue Primauguet. Peux-tu voir sur la photo où j'habite ? Quel est pour moi le plus court chemin pour aller à l'école Jean Bart ?

Indications

Identification d'angles à l'intersection de droites et demi-droites, codage. Nécessité de nommer des angles ayant même sommet. Notion d'angles droits, aigus, obtus.

Comment comparer des angles ?

Équerres et menuiserie



Comment construire ces 2 équerres du commerce ?



Comment construire une équerre d'onglet de menuiserie ?

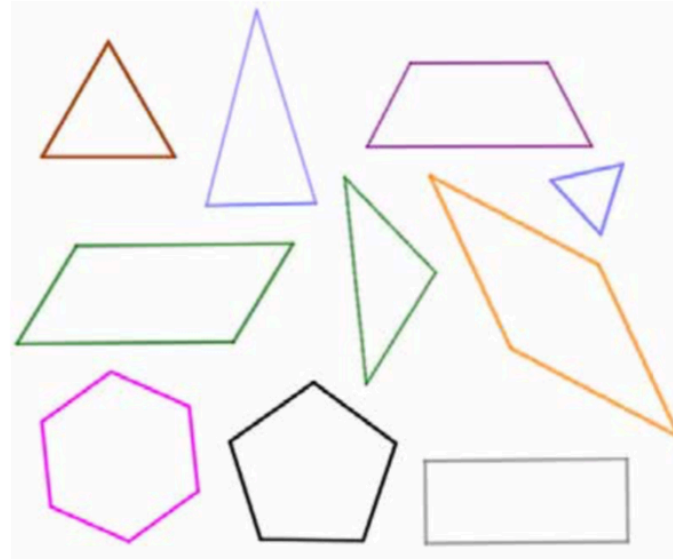
Indications

Les 2 équerres du commerce sont les moitiés des 2 figures régulières les plus simples : le carré et le triangle équilatéral. À deviner et vérifier en construisant ces figures et en comparant les angles.

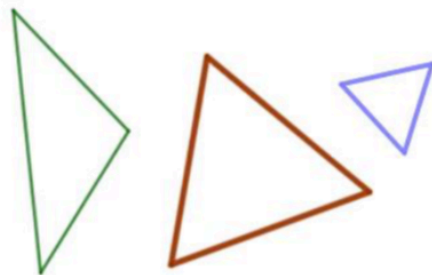
Sources : Images sur la Toile

Jeu de construction

Voici les différentes pièces d'un jeu de construction magnétique :



- 1/ Donner un nom à chacune des figures géométriques de ces pièces.
- 2/ Donner les propriétés des figures ci-dessous (longueurs, angles, ...).
- 3/ Inversement, parmi les polygones ci-dessus :
 - Quel est le polygone qui a deux angles et seulement deux angles égaux ?
 - Quel sont les polygones qui ont tous leurs côtés de même longueur ?
 - Quel sont les polygones avec exactement deux côtés de même mesure ?
 - Quels sont les quadrilatères qui ont les angles opposés égaux ?
- 4/ Quel serait le quadrilatère qui a quatre angles égaux et quatre côtés de même mesure ?



5/ Nous avons vu que les triangles équilatéraux avaient leurs trois angles égaux.

Comparer les angles des triangles équilatéraux qui sont de différentes tailles. Que pourriez-vous conclure ?

Même question avec les triangles isocèles qui ont deux angles égaux.

Indications

On retravaille le nom des polygones et le vocabulaire associé à leurs propriétés : côtés de même longueur, parallèles, perpendiculaires,

angles opposés... Faire un travail spécifique autour du triangle équilatéral permet de voir que, comme pour tous les polygones réguliers, tous ses angles sont égaux mais, plus que cela : tous les triangles équilatéraux ont les mêmes angles. On peut utiliser le kitangle (voir la rubrique Instruments de la partie 6)

Source : images sur la Toile

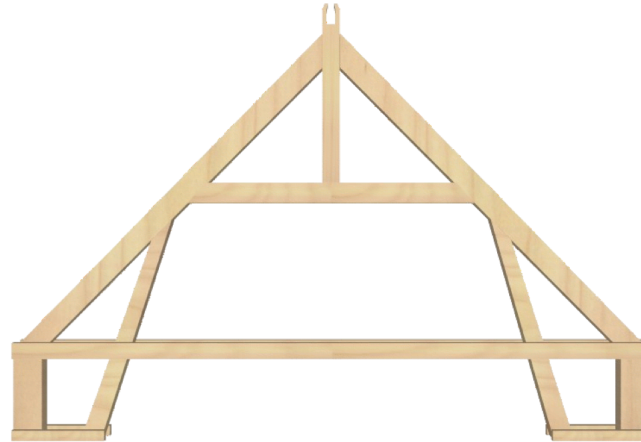
Constructions

Le chevron et la flèche

À l'aide de l'équerre demi-triangle équilatéral, tracer sur la bande de papier fournie deux chevrons de 1 cm et une flèche de 8,3 cm (voir illustrations ci-dessous) ayant la largeur de la bande. Les découper, puis les coller sur le cahier de travail.



Élément de charpente



On veut construire une maquette de la charpente.

a. Réalise sur une feuille un plan de 2 pièces de cette charpente : l'entrait et la jambe de force.

Tu prendras une largeur de 2 cm, et une longueur de 15 cm pour l'entrait et de 10 cm pour la jambe de force.

b. Vérification. Construis sur ton cahier un triangle rectangle isocèle dont les 2 côtés égaux mesurent 10 cm (il représente le grand triangle de la charpente).

Découpe les 2 pièces que tu as réalisées, et dispose-les comme sur la charpente. Si elles s'ajustent bien, colle-les dans ton triangle. Sinon cherche ton erreur.



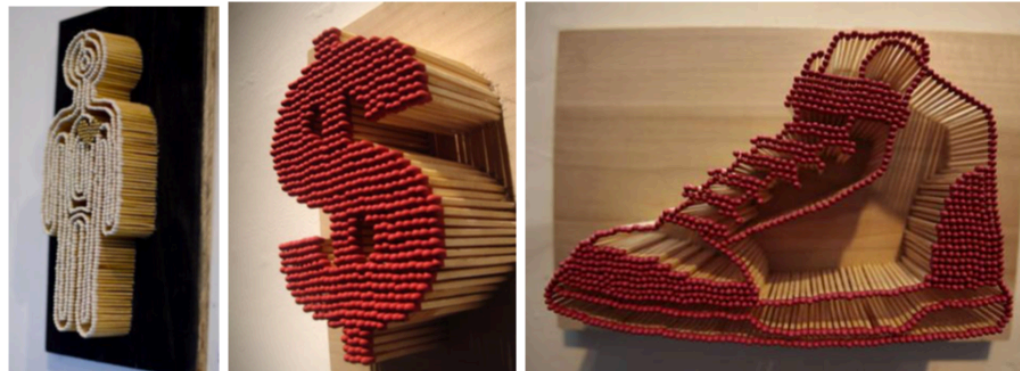
Exemple 3

LES POPULATIONS AU CYCLE 3

Comment dénombrer des populations ?

Les allumettes

L'artiste Pei San Ng, originaire de Taiwan, réalise certaines de ses sculptures à base d'allumettes :



La sculpture « Love » (placée ci-dessous) a été réalisée avec 2500 allumettes.
Pourrait-on en faire autant avec notre stock d'allumettes ?



Indications

- 1) On donne un ou plusieurs « récipients » contenant chacun 5 ou 6 grosses boîtes d'allumettes (1,90 € la boîte de 240).
- 2) On peut mettre en place des modalités variées de travail des élèves. On peut autoriser la calculatrice si un élève en fait la demande.
- 3) L'utilisation de paquets de 10, 10 fois 10, ... pour compter le nombre d'allumettes permet de

Théâtres



Combien y-a-t-il de places dans ces théâtres modernes ou anciens ?

Indications

Il est nécessaire de laisser les élèves utiliser la méthode de leur choix (addition réitérée, dénombrement, multiplication....).

La diversité des réponses permettra des échanges riches lors de la mise en commun et la comparaison de l'efficacité des différentes méthodes utilisées (rapidité, fiabilité) en en démontrant ainsi l'utilité.

Source : images sur la Toile



Comment comparer des populations ?

Nombre de passagers

Lequel de ces avions peut emmener le plus de passagers ? Combien a-t-il de places de plus ?

A319

BOEING 767

Indications
Cette situation fait appel au travail sur le dénombrement.
La comparaison peut consister, par exemple, en un repérage visuel de parties identiques. Les 24 sièges composant chacune des lignes de sièges de l’AIRBUS A319 « entrent » dans celles du BOEING 767.

Sources : <https://www.aigle-azur.com/votre-voyage/options-supplementaires/choix-du-siege>
<http://www.voyagerenavion.fr/2015/08/29/westjet-se-lance-dans-le-long-courrier/>

La Nouvelle Aquitaine

Évolution démographique de la région Nouvelle-Aquitaine

1968	1975	1982	1990	1999	2008	2013	2014
4 676 995	4 817 190	4 961 927	5 113 789	5 259 366	5 671 076	5 844 177	5 879 144

Sources : recensements 1968-2013¹²¹, 2014¹ .

Que pouvez-vous dire sur la région Nouvelle-Aquitaine ?

Quelle a été la variation de population en Nouvelle Aquitaine entre 1968 et 2014 ?

Comparer la variation entre 2008 et 2013 et celle entre 2013 et 2014.

Indications

Attention : le nombre d'années pour chaque fourchette n'est pas le même.

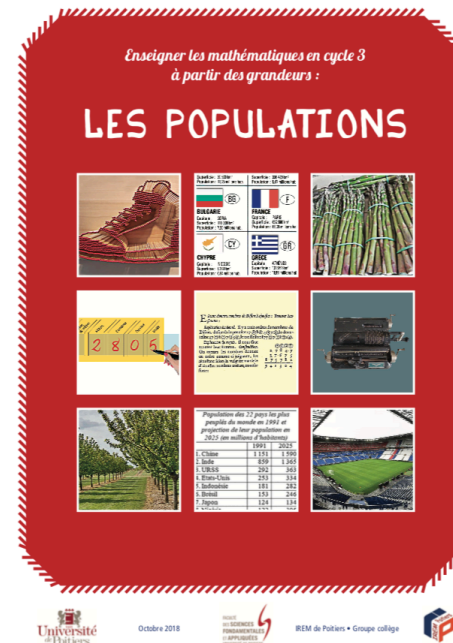
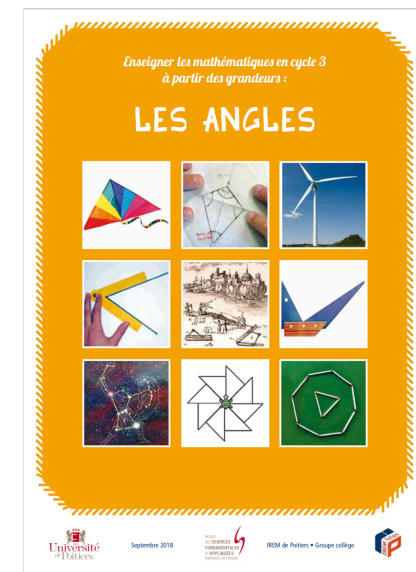
Pour aller plus loin...

Brochure Angles au Cycle 3

15 €

Brochure Populations au Cycle 3

15 €



Bibliographie

- CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana, Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. Petit x, n° 55, p. 5-32, IREM de Grenoble, 2001.
- CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana, Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. Petit x, n° 59, p. 43-76, IREM de Grenoble, 2002.
- CLAIRAUT Alexis, Éléments de Géométrie. Lambert et Durand, Paris, 1741.
- EUCLIDE, Les Éléments. Vol. 1, Introduction générale, Livres I à IV, traduction et commentaires Bernard Vitrac, PUF, Paris, 1990 , Vol.2, Livres V à IX, 1994, Vol. 3, Live X, 1998, Vol. 4, Livres XI à XIII, 2001.
- GHYS Étienne, Les "éléments de géométrie" de Clairaut (1741) : une manière moderne d'enseigner la géométrie ? Conférence pour le tricentenaire de Clairaut, mathématicien et géophysicien, Académie des sciences, 14 mai 2013 (<http://www.academie-sciences.fr/fr/Colloques/tricentenaire-de-clairaut-mathematicien-et-geophysicien.html>).
- GUICHARD Jean-Paul, Les volumes en classe de sixième. Repères IREM n° 76, p. 5-29, Topiques éditions, juillet 2009.

Références institutionnelles

- BO Spécial n°11 du 26 novembre 2015, Programmes des cycles 2, 3, 4, 2015, disponible sur http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=33400
- DEPP, note d'information n°19 mai 2015 CEDRE 2014, 2015, disponible sur http://cache.media.education.gouv.fr/file/2015/26/0/depp-ni-2015-19-cedre-2014-mathematiques-college_422260.pdf
- DEPP, rapport technique sur évaluations CEDRE, 2015, disponible sur http://cache.media.education.gouv.fr/file/Cedre/15/1/DEPP-CEDRE-mathematiques-college-rapport-technique_517151.pdf
- Grandeurs et mesures, documents d'accompagnement pour l'enseignement, 2015, disponible sur :
 - Cycle 2 :
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/69/5/RA16_C2_MATHS_grandeur_et_mesures_doc_maitre_587695.pdf
 - Cycle 3 :
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/16/8/RA16_C3_MATH_grand_mesur_N.D_609168.pdf
 - Cycle 4 :
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Grandeurs_et_mesures/52/7/RA16_MATH_C4_doc_maitre_grand_mesu_610527.pdf

Mises en œuvre réalisées

IREM de Poitiers, Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les Angles (2009), les Aires (2010), les Volumes (2011), les Longueurs (2012), les Durées (2010), les Prix (2011).

Brochures disponibles à l'IREM de Poitiers (<http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/>)



Conclusion

- Moment d'échange
- Pour me joindre :
 - matthieu.gaud@ac-poitiers.fr