Fiche de travail – Al-Kashi

Première partie : Trigonométrie dans le triangle rectangle

Définition :
Dans un triangle rectangle, on appelle :
- Cosinus d'un angle aigu le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle aigu par la longueur de l'hypoténuse.
- Sinus d'un angle aigu le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle aigu par la longueur de l'hypoténuse.
- Tangente d'un angle aigu le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle aigu.

Soit ABC un triangle rectangle en A tels que : $AB = 5$ cm et $AC = 12$ cm.

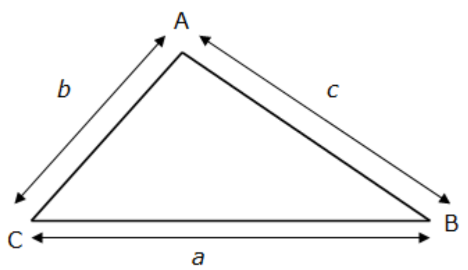
1) Déterminer la longueur BC.

2) Déterminer la valeur de $\cos(\widehat{ABC})$, $\sin(\widehat{ABC})$ et $\tan(\widehat{ABC})$.

3) **a)** Calculer $\left(\cos(\widehat{ABC})\right)^2 + \left(\sin(\widehat{ABC})\right)^2$
b) Calculer $\frac{\sin(\widehat{ABC})}{\cos(\widehat{ABC})}$. Que remarque-t-on ?

4) **a)** Montrer que dans n'importe quel triangle ABC rectangle en A, on a $\left(\cos(\widehat{ABC})\right)^2 + \left(\sin(\widehat{ABC})\right)^2 = 1$.
b) Montrer que dans n'importe quel triangle ABC rectangle en A, on a $\frac{\sin(\widehat{ABC})}{\cos(\widehat{ABC})} = \tan(\widehat{ABC})$.

Deuxième partie : Démonstration de la formule d'Al-Kashi



Soit ABC un triangle tel que $BC = a$, $AB = c$ et $AC = b$.
On considère la hauteur du triangle ABC issue de A. On note H le pied de cette hauteur (le point d'intersection de cette hauteur et de [BC]).
On note $HB = x$ et on note $AH = h$.

1) Dans le triangle AHB, exprimer c^2 en fonction de x et h

2) En travaillant dans le triangle AHC et en utilisant le résultat de la question 1), prouver que :
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2xa$$

3) a) Déterminer le cosinus de l'angle aigu $\widehat{ABC}$.
b) En déduire une expression de x.

4) A l'aide des résultats des questions 2) et 3), prouver la formule d'Al-Kashi :
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{ABC})$$

Troisième partie : Application directe

1) Construire un triangle ABC tel que :
$$AB = 10 \text{ cm} \quad ; \quad \widehat{BAC} = 60° \quad \text{et} \quad AC = 6 \text{ cm}$$

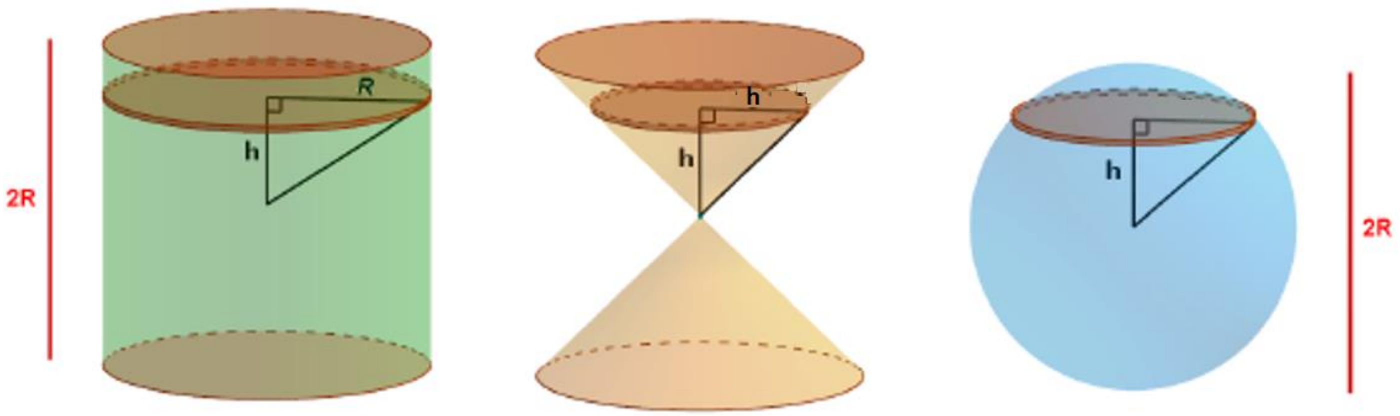
2) A l'aide de la formule d'Al-Kashi, calculer BC. On donnera une valeur approchée du résultat au millimètre près.

Document réalisé par Morgan Gilot, Académie d'Orleans-Tours

Fiche de travail - Archimède

Le but d'Archimède était de déterminer une formule pour calculer le volume d'une boule.
Pour cela, il considère :

- un cylindre hauteur $2R$ et dont la base est un disque de rayon R
- un sablier (double-cône) de hauteur totale $2R$ et dont la base est un disque de rayon R
- une boule de diamètre $2R$



Il considère le point se situant sur l'axe du sablier, dans le cône supérieur et qui est à équidistance du sommet du cône et de la paroi du cône supérieur. Il note alors h la distance qui sépare ce point et le sommet du cône supérieur.

Il étudie alors, pour chaque solide la tranches d'épaisseur $\mathcal{E}$ (très petite) qui se situe à la distance h du centre du solide.

Il affirme que, comme $\mathcal{E}$ est très petit, les trois tranches étudiées peuvent être assimilées à de petits cylindres.

Il appelle $T_{cylindre}$, $T_{cône}$ et T_{boule} les tranches respectives du cylindre, du cône et de la boule.

1) Déterminer le volume de $T_{cylindre}$ en fonction de R et de $\mathcal{E}$.

2) Déterminer le volume de $T_{cône}$ en fonction de h et de $\mathcal{E}$.

3) **a)** Prouver que le rayon de la base de T_{boule} est égal à $\sqrt{R^2 - h^2}$
b) En déduire le volume de T_{boule} en fonction de R, h et $\mathcal{E}$.

4) Montrer que $V_{T_{boule}} = V_{T_{cylindre}} - V_{T_{cône}}$

5) A partir des éléments trouvés, expliquer comment Archimède en est arrivé à la conclusion que :

$$V_{boule} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Fiche de travail - Bernoulli

Première partie : Epreuve de Bernoulli

Définition : Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne comprenant que deux issues. On notera les deux événements élémentaires S (pour « Succès ») et E (pour « Echec »). Parfois, E est noté $\bar{S}$, ce qui signifie « contraire de S ».

1) On considère un jeu qui consiste à tirer une carte dans un jeu de 32 cartes non truqué.
On s'intéresse à l'événement S « Tirer une figure ».
- **a)** Expliquer pourquoi cette expérience est une épreuve de Bernoulli.
- **b)** Quelle est la probabilité de succès $p(S)$?
- **c)** Décrire l'événement $\bar{S}$. Quelle est sa probabilité ?

2) On considère une épreuve de Bernoulli tel que $p(S) = p$.
Exprimer la probabilité $p(E)$ en fonction de p.

3) Donner un autre exemple d'épreuve de Bernoulli, ainsi que la probabilité de succès associée et la probabilité d'échec.

Deuxième partie : Schéma de Bernoulli

Définition : On appelle **schéma de Bernoulli** la répétition de plusieurs épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (qui n'ont pas d'influence les unes sur les autres).

1) Voici deux expériences :

Expérience n°1 : Dans une urne opaque, il y a 5 boues rouges et 3 boules vertes toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne et on note sa couleur. On pose la boule à côté de l'urne et on tire à nouveau une boule de l'urne, et ainsi de suite. En tout, on tire 3 boules.	Expérience n°2 : Dans une urne opaque, il y a 5 boues rouges et 3 boules vertes toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne et on note sa couleur. On remet la boule dans l'urne et on tire à nouveau une boule de l'urne, et ainsi de suite. En tout, on tire 3 boules.

- **a)** Construire les arbres pondérés des deux expériences.
- **b)** Laquelle de ces deux expériences correspond à un schéma de Bernoulli ? Justifier.

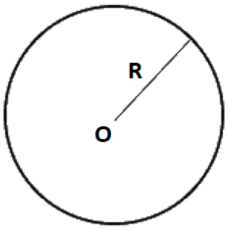
2) Un élève se retrouve face à une série de cinq questions Vrai/Faux lors d'une évaluation.
Il répond au hasard aux cinq questions.
- **a)** Quelle est la probabilité qu'il ait tout bon ?
- **b)** Quelle est la probabilité qu'il ait au moins une erreur ?
- **c)** Quelle est la probabilité qu'il ait au moins une bonne réponse ?

3) Un élève se retrouve face à une série de 4 QCM (questions à choix multiples) lors d'une évaluation.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule est correcte.
- **a)** Quelle est la probabilité qu'il ait tout bon ?
- **b)** Quelle est la probabilité qu'il ait au moins une bonne réponse ?

Fiche de travail – Cavalieri

<u>Première partie : Calcul de l'aire du disque</u>

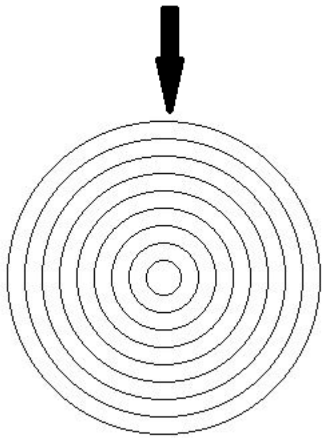
<u>Première version du principe de Cavalieri :</u>
Pour Cavalieri, une surface est une juxtaposition de lignes *parallèles*.
Si les lignes qui constituent une surface S_1 sont exactement de la même longueur que les lignes qui constituent une surface S_2, alors S_1 et S_2 ont la même aire.



On considère un disque de centre O et de rayon R.

1) Quelle est la longueur de ce cercle ?

On considère que la surface du disque est composée de cercles concentriques de rayon r avec r qui varie de 0 à R (voir figure de droite).



2) On coupe ces lignes au niveau de la flèche noire et on les « déroule » les unes par-dessus les autres.
Quelle figure allons-nous obtenir ?

3) Calculer l'aire de cette figure.

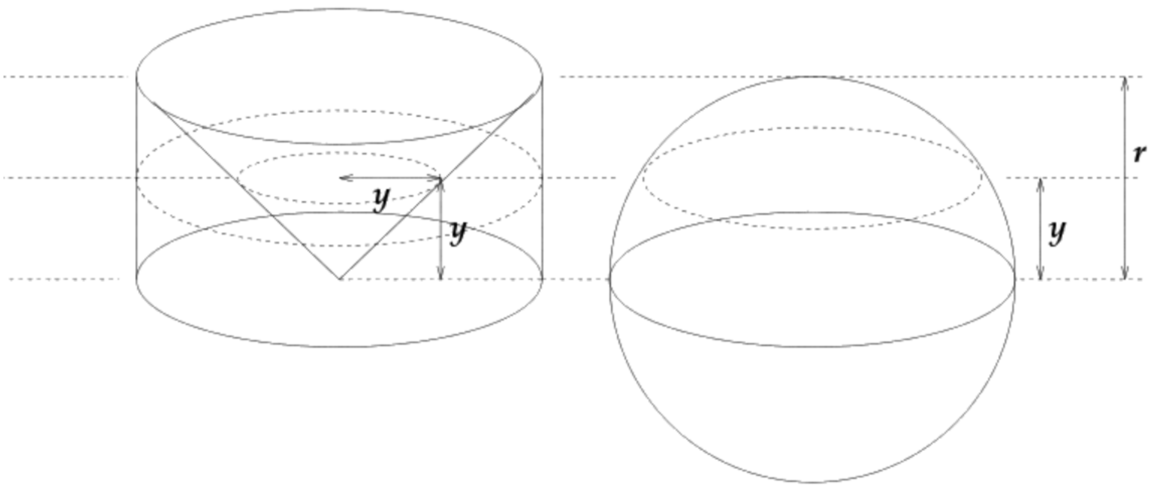
<u>Deuxième partie : Calcul du volume de la boule</u>

<u>Une autre version du principe de Cavalieri (ou méthode des indivisibles) :</u>

- <u>En 2 dimensions</u> : Considérons deux surfaces dans le plan, contenues entre deux droites parallèles D_1 et D_2.
  Si toute ligne droite D, parallèle à D_1 et D_2, coupe les deux surfaces en segments de même longueur, alors les 2 surfaces ont la même aire.
- <u>En 3 dimensions</u> : Considérons deux solides dans l'espace, contenus entre deux plans parallèles P_1 et P_2.
  Si tout plan P, parallèle à P_1 et P_2, coupe les 2 solides en surfaces de même aire, alors les deux solides ont le même volume.

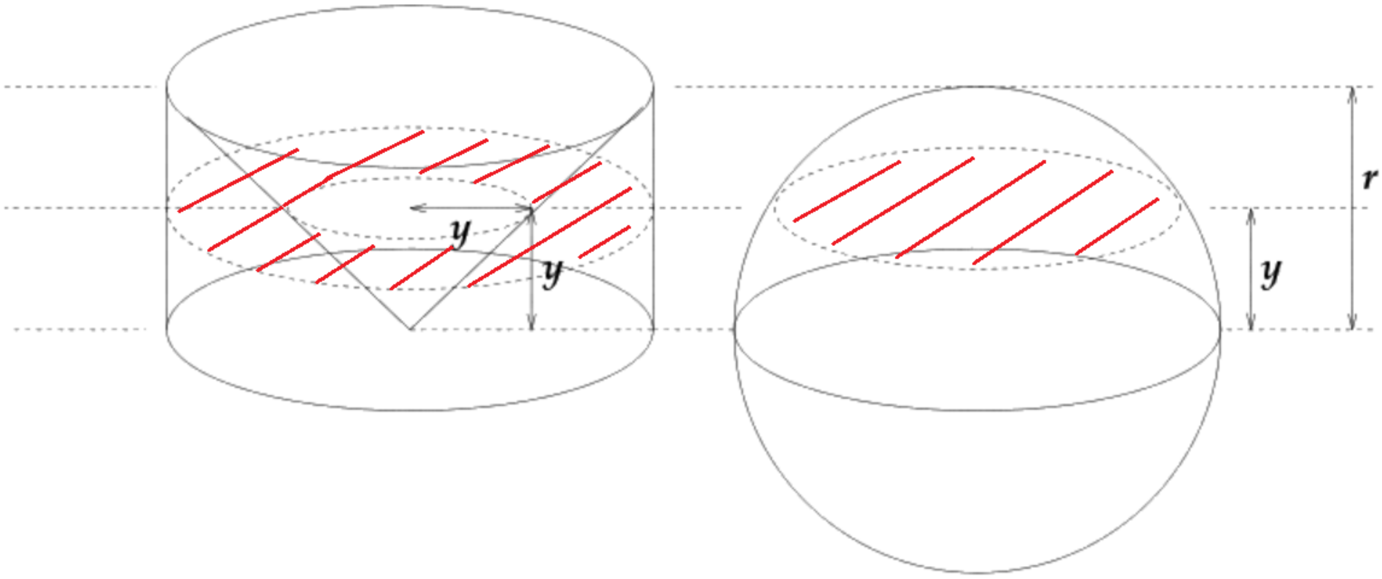
On considère :

- une boule de rayon r
- un cylindre de hauteur r et dont la base est un disque de rayon r
- le cône inscrit dans le cylindre de hauteur r et dont la base est un disque de rayon r.



On coupe le cône par un plan parallèle à sa base, de sorte à ce que la distance entre le sommet du cône et le plan soit égale au rayon du disque-section obtenu. On note cette distance y.

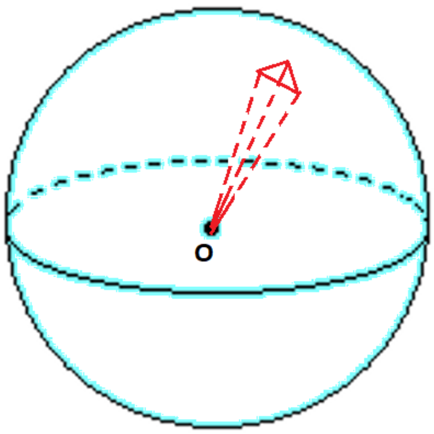
1) Prouver que les deux surfaces hachurées ont la même aire.



2) En utilisant le principe de Cavalieri en dimension 3, prouver que le volume de la boule est égal à

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Troisième partie : Déduction de l'aire de la sphère



On considère la sphère de centre O et de rayon r.

Pour déterminer l'aire de la sphère, on va découper sa surface en n très petits polygones.

Il faut que ces polygones soient très petits pour que l'on puisse considérer qu'ils gardent leur forme sur la sphère. S'ils étaient trop grands, cette approximation n'aurait pas de sens.

Un de ces polygones (un triangle) est représenté ci-contre.
On note A_1 l'aire du polygone n°1, A_2 l'aire du polygone n°2, …, A_n l'aire du polygone n°n.

1) Exprimer l'aire totale de la sphère en fonction de $A_1, \dots, A_n$.

2) Exprimer le volume de la pyramide de sommet O et de base le polygone n°1.

3) En additionnant les volumes de toutes les petites pyramides, quel volume allons-nous trouver ?

4) En déduire que :

$$\frac{1}{3}r \times Aire\ de\ la\ sphère = \frac{4}{3}\pi r^3$$

5) En déduire l'aire de la sphère.

Fiche de travail - Diophante

Diophante est notamment connu pour son épitaphe (inscription funéraire placée sur une pierre tombale) qui est un problème attribué à Métrodore (vers 500) qui permet de calculer l'âge de Diophante à sa mort :

Οὗτος τὸν Διόφαντον ἔχει τάφος ἆ μέγα θαῦμα
Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει
Ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην
Δωδεκάτη δ'επιθεὶς μῆλα πόρεν χλοάειν
Τῇ δ'αρ' ἐπ'ἑβδομάτη τὸ γαμήλιον ἧψατο φέγγος
Ἐκ δέ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπενεύσεν ἔτει
Αἴ αἴ τελύγετος τέκος, ἧμισυ πάτρος
Τοῦ δὲ καὶ κρυερὸς μέτρον ἕλων βιότου.
Πένθος δ'αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐκαυτοῖς,
Τῇ δὲ πόσου σοφίῃ τερμ'επόρησι βίου

Une version de ce problème a été composée en alexandrins par H. Eutrope :

Passant, sous ce tombeau repose Diophante,
Et quelques vers tracés par une main savante
Vont te faire connaître à quel âge il est mort :
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance ;
Le douzième fut pris par son adolescence.
Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula,
Puis, s'étant marié, sa femme lui donna
Cinq ans après un fils qui, du destin sévère
Reçut de jours, hélas ! deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut :
Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.

A quel âge est mort Diophante ?

Fiche de travail - Euclide

<u>Première partie : Résolution d'un petit problème</u>

On considère un triangle ABC.
On sait que :

- la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ est égale au double de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$
- la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$ est égale au triple de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$

Déterminer la mesure de chacun des angles du triangle ABC.

<u>Deuxième partie : Démonstration de la propriété sur la somme des angles d'un triangle</u>

1) On considère un triangle ABC.
2) Soit (d) la droite parallèle à (AB) passant par C.
3) Soit E et F deux points appartenant à (d) tels que $C \in [EF]$.
4) Quel angle a la même mesure que $\widehat{BAC}$? Justifier.
5) Quel angle a la même mesure que $\widehat{ABC}$? Justifier.
6) Conclure sur la somme des angles du triangle ABC.

<u>Troisième partie : Quelques exemples atour d'autres polygones</u>

1) Déterminer la somme des angles d'un quadrilatère.
2) Déterminer la somme des angles d'un pentagone.
3) Déterminer la somme des angles d'un hexagone.
4) Déterminer la somme des angles d'un octogone

<u>Quatrième partie : Généralisation</u>

Quelle conjecture peut-on faire quant à la somme des angles d'un polygone à n côtés ?

Fiche de travail - Euler

Première partie : Trois droites remarquables du triangle

Définitions :
On appelle :
- **médiatrice** d'un segment la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par son milieu.
- **médiane** d'un triangle une droite qui passe par un sommet du triangle et par le milieu du côté opposé à ce sommet.
- **hauteur** d'un triangle une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

1) Tracer un triangle ABC.
2) Tracer en vert les trois médiatrices du triangle, en rouges les trois médianes du triangle, en bleu les trois hauteurs du triangle. Que remarque-t-on sur ces trois triplets de droites ?
3) Quelle conjecture peut-on faire à propos des trois points ainsi obtenus ?

Deuxième partie : Démonstration de la concourance des médiatrices

On considère un triangle ABC. On appelle (d_1) la médiatrice du segment [BC], (d_2) la médiatrice de [AC] et (d_3) la médiatrice de [AB]. On appelle O le point d'intersection de (d_1) et (d_2).

1) Expliquer pourquoi nous avons $OB = OC$ et $OA = OC$.
2) En déduire que O appartient à (d_3).
3) Que peut-on en conclure.

Définition : Le point d'intersection des trois médiatrices d'un triangle est appelé le **centre du cercle circonscrit** au triangle.

Troisième partie : Démonstration de la concourance des hauteurs

On considère un triangle ABC. On appelle (h_1) la hauteur du triangle issue de A, (h_2) la hauteur du triangle issue de B et (h_3) la hauteur du triangle issue de C.
On note ensuite (d_a) la droite parallèle à (BC) qui passe par A, (d_b) la droite parallèle à (AC) qui passe par B et (d_c) la droite parallèle à (AB) qui passe par C.
On note enfin D le point d'intersection de (d_b) et (d_c), E le point d'intersection de (d_a) et (d_c) et F le point d'intersection de (d_a) et (d_b).

1) Quelle est la nature des quadrilatères AFBC et AECB ?
2) Expliquer pourquoi cela entraine que A est le milieu $[FE]$
3) Que représente la droite (h_1) pour le segment $[EF]$. Justifier.
4) En raisonnant de la même manière, déterminer ce que représentent la droite (h_2) et la droite (h_3) ?
5) Que peut-on alors dire sur les droites (h_1), (h_2) et (h_3) ?

Définition : Le point d'intersection des trois hauteurs d'un triangle est appelé l'**orthocentre** au triangle.

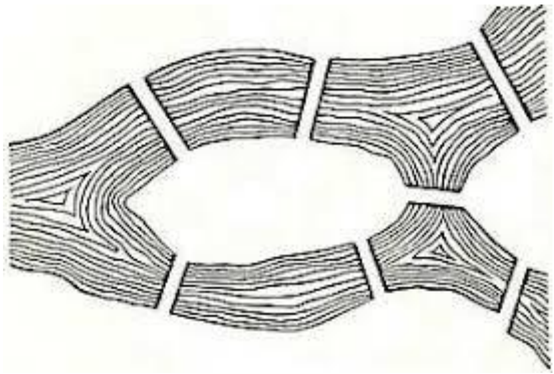
Propriété - définition : Les trois médianes d'un triangle sont concourantes et leur point d'intersection est appelé le **centre de gravité** au triangle.

Propriété - définition : Dans un triangle, le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité sont alignés. La droite qu'ils forment est appelée **droite d'Euler.**

Fiche de travail - Euler

<u>Première partie : Un problème à résoudre</u>

Au XVIIIe siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, en Russie) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait sept ponts, disposés selon le schéma ci-contre.

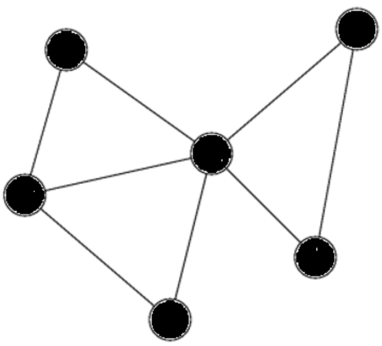


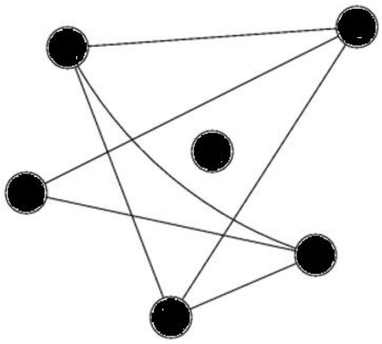
Le souhait des habitants de Königsberg était de faire une promenade passant dans chacune des quatre parties de la ville mais une fois et une seule fois par chaque pont.

Cela est-il possible ?

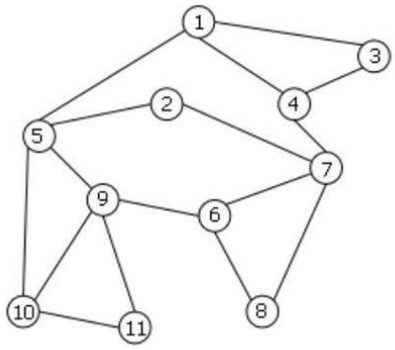
<u>Deuxième partie : Une schématisation du problème</u>

On appelle **<u>graphe</u>** un ensemble de points et de « liens » comme sur les figures ci-dessous :





<u>Définition :</u>
Les points sont appelés **<u>sommets</u>** (ou nœuds) du graphe.
Les liens sont appelés les **<u>arêtes</u>** du graphe.
Une arête a pour **<u>extrémités</u>** deux sommets.
On appelle **<u>degré</u>** d'un sommet le nombre de d'arêtes qui en partent (ou qui arrivent).



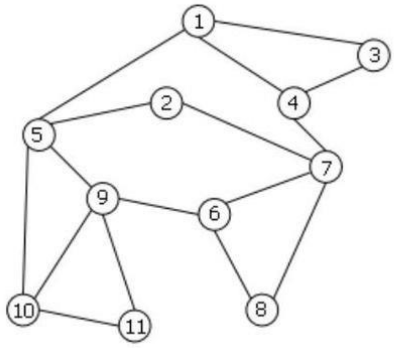
On considère le graphe ci-contre.
1) Combien de sommet a ce graphe ?
2) Quel est le degré du sommet 2 ?
3) Quel est le degré du sommet 7 ?

4) Schématiser le problème des ponts de Königsberg sous la forme d'un graphe.

Troisième partie : Chaîne et cycle eulériens

Définitions :
Une **chaîne** est une suite quelconque d'arêtes reliées entre elles.

Un **cycle** est une chaîne qui ne repasse pas deux fois par la même arête et dont l'origine et l'extrémité sont confondues (le sommet d'arrivée et le sommet de départ sont les mêmes).



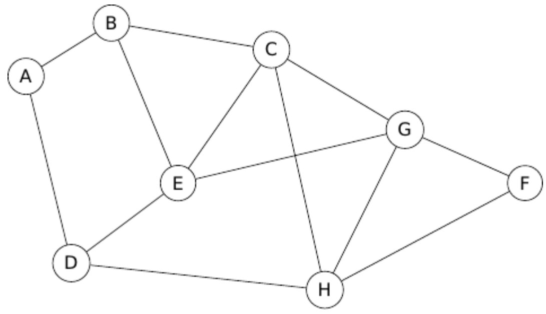
1) Donner une chaine d'extrémité 1 et 11.
2) Donner un cycle d'extrémité 5.

Définition :
On dit qu'une chaine est **eulérienne** si elle est composée de toutes les arêtes du graphe, prises chacune une fois et une seule.

On dit qu'un cycle est **eulérien** s'il est composé de toutes les arêtes du graphe, prises chacune une fois et une seule.

On dit qu'un graphe est eulérien s'il possède un cycle eulérien.

On considère le graphe ci-contre.



3) Donner un exemple de chaîne eulérienne.

4) Est-ce un graph eulérien ?

5) Le graphe des ponts de Königsberg admet-il une chaîne eulérienne ?

6) Le graphe utilisé pour les questions 1) et 2) de cette partie possède-t-il une chaîne eulérienne ?

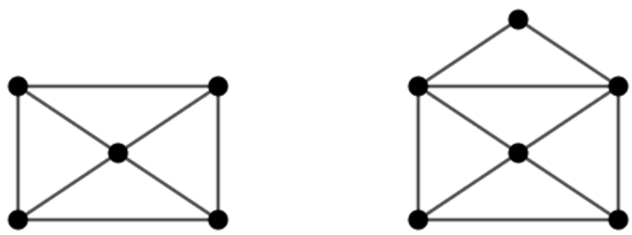
Quatrième partie : Une propriété très utile

1) Dessiner un graphe à 5 sommets qui possède une chaîne eulérienne.

2) Dessiner un graphe à 6 sommets qui soit eulérien.

3) **a)** En s'intéressant aux degrés des sommets des graphes possédant des chaînes eulériennes et aux degrés des sommets des graphes eulériens, que remarque-t-on ?
b) Quelles propriétés peut-on conjecturer ?

4) Peut-on dessiner les enveloppes ci-contre sans lever le crayon et en passant une fois et une seule sur chaque trait (mais on peut passer plusieurs fois par un même point) ? Justifier.



5) Était-il possible de répondre au problème des ponts de Königsberg sans essayer différents chemins ? Pourquoi ?

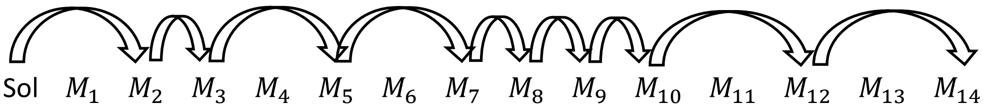
Fiche de travail - Fibonacci

<u>Première partie : Un problème à résoudre</u>

Juliette se trouve face à son escalier qui composte 14 marches et se demande :

« Combien de possibilités ai-je pour monter cet escalier en sachant que je peux monter, à chaque fois, soit une marche, soit deux marches. »

Par exemple :



est une possibilité.

1) Si l'escalier comporte 1 marche, combien de possibilités y a-t-il ? Les lister. On note F_1 ce nombre de possibilités.

2) Si l'escalier comporte 2 marches, combien de possibilités y a-t-il ? Les lister. On note F_2 ce nombre de possibilités.

3) Si l'escalier comporte 3 marches, combien de possibilités y a-t-il ? Les lister. On note F_3 ce nombre de possibilités.

4) Si l'escalier comporte 4 marches, combien de possibilités y a-t-il ? Les lister. On note F_4 ce nombre de possibilités.

5) Répondre à la question de Juliette.

<u>Deuxième partie : Mise en évidence d'une relation de calcul</u>

On peut monter, à chaque fois, soit une marche, soit deux marches.
On appelle F_n le nombre de possibilités pour monter n marches.
Etablir une relation de calcul qui permette de calculer F_n à partir de F_{n-1} et F_{n-2}.

Cette suite de nombres $F_0, F_1, \dots, F_n$ est appelée suite de Fibonacci.

<u>Troisième partie : Manipulation de cette suite</u>

1) Remplir la suite de Fibonacci suivante :

2	5								

2) Compléter la suite de Fibonacci suivante :

9							241

3) Trouver la suite de Fibonacci commençant par 8 et dont le 7ème terme est 134 :

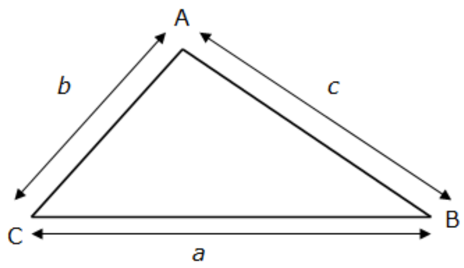
8						134

<u>Quatrième partie : Encadrement du nombre d'or</u>

« Le rapport de deux nombres consécutifs de la suite est alternativement supérieur et inférieur au nombre d'or ϕ »

A l'aide de l'information ci-dessus, donner un encadrement précis du nombre d'or ϕ, puis faire des recherches sur la valeur exacte de ϕ.

Fiche de travail - Héron



Soit ABC un triangle tel que $BC = a$, $AB = c$ et $AC = b$.
La formule de Héron est une formule qui permet de calculer l'aire S d'un triangle à partir de la longueur de ses côtés.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où p est le demi-périmètre du triangle :

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Première partie : Le cas d'un triangle isocèle particulier

On considère le triangle ABC isocèle en A tel que $BC = 10$ cm et $AC = 13$ cm.
1) Calculer la longueur de la hauteur de ce triangle issue de A.
2) Calculer l'aire de ce triangle sans utiliser la formule de Héron.
3) Calculer l'aire de ce triangle en utilisant la formule de Héron.

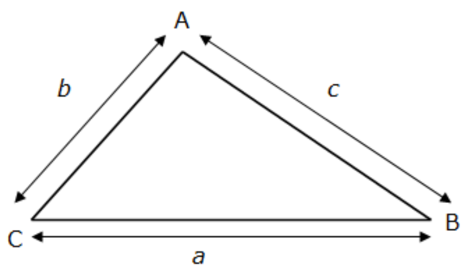
Deuxième partie : Le cas du triangle rectangle isocèle

On considère un triangle ABC rectangle isocèle en A tel que $AB = AC = a$ cm.
1) Calculer l'aire de ce triangle en fonction de a, sans utiliser la formule de Héron.
2) Calculer la longueur BC en fonction de a.
3) Vérifier qu'avec la formule de Héron, on retrouve bien le même résultat que dans la question 1.

Troisième partie : Le cas du triangle équilatéral

On considère un triangle ABC équilatéral tel que $AB = a$ cm.
1) Calculer la hauteur de ce triangle issue de C.
2) Calculer l'aire de ce triangle en fonction de a, sans utiliser la formule de Héron.
3) Vérifier qu'avec la formule de Héron, on retrouve bien le même résultat.

Quatrième partie : Le cas général



On considère la hauteur du triangle ABC issue de A. On note H le pied de cette hauteur (le point d'intersection de cette hauteur et de [BC]).
On note $HB = x$ et on note $AH = h$.

1) Dans le triangle AHB, exprimer h en fonction de c et x.

2) Dans le triangle AHC, exprimer h en fonction de a, b et x.

3) En déduire que :

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

4) En replaçant x dans l'expression trouvée dans la question 1), montrer, à l'aide des identités remarquables que

$$h = \frac{\sqrt{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}}{2a}$$

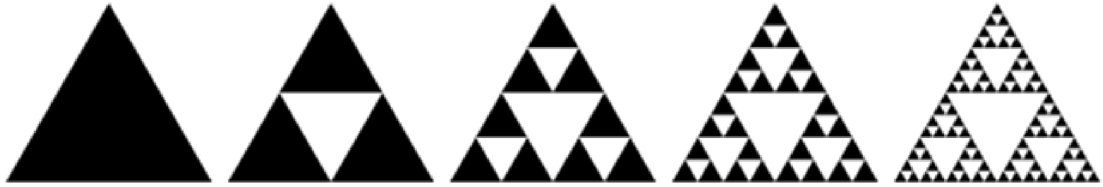
5) En déduire que l'aire du triangle ABC est :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Document réalisé par Morgan Gilot, Académie d'Orleans-Tours

Fiche de travail - Pascal

<u>Première partie : Le triangle de Sierpinski</u>



Etape 0 Etape 1 Etape 2 Etape 3 Etape 4

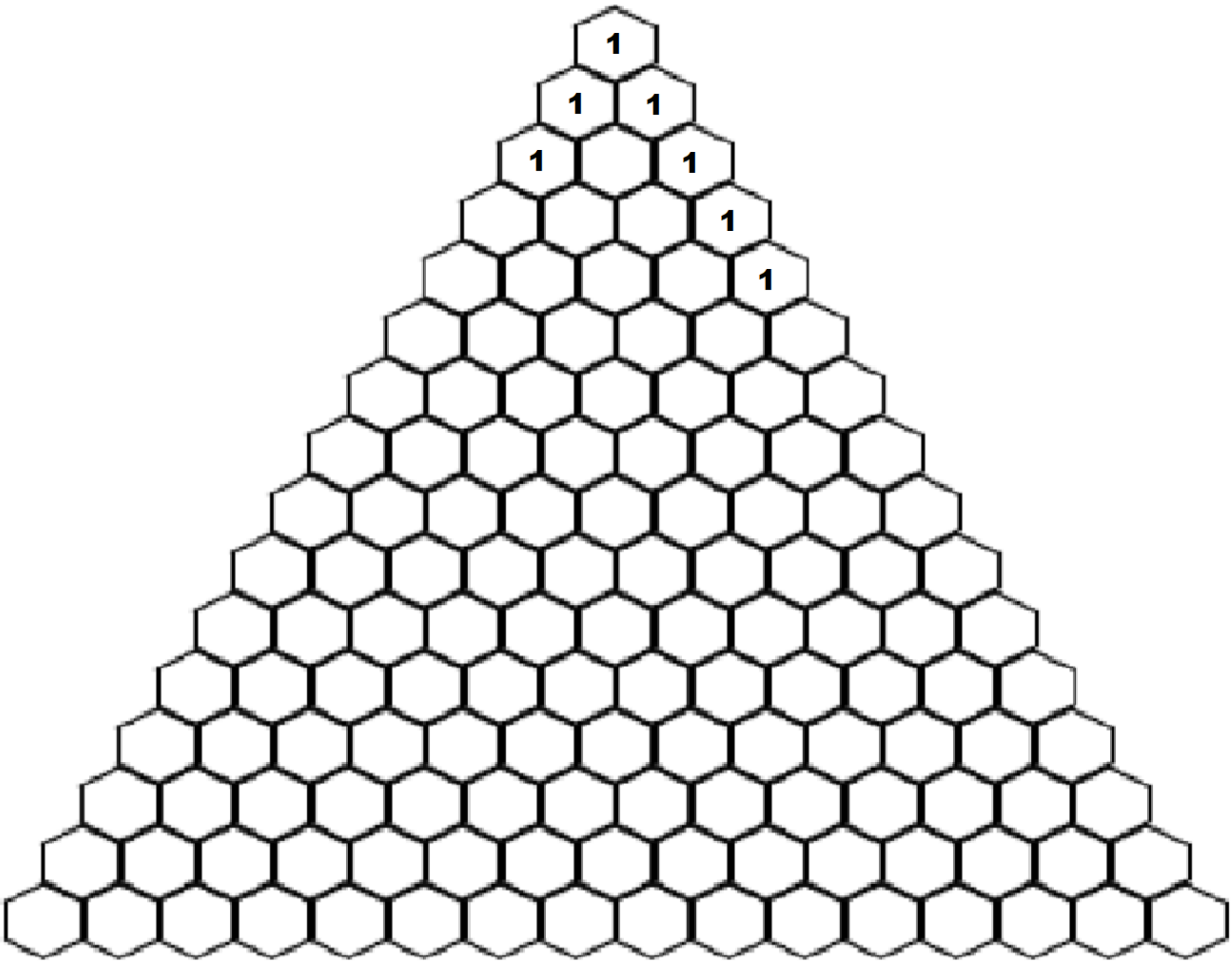
On va construire sur une feuille de papier à dessin (ou papier rigide) les trois premières étapes.

> **<u>ALGORITHME DE CONSTRUCTION</u>**
>
> **Étape 0 :** Tracer un triangle équilatéral de 16 cm de côté.
>
> **Étape 1 :** Construire les trois segments qui joignent deux à deux les milieux des côtés du triangle, ce qui délimite 4 nouveaux triangles et colorier (très finement) tous les triangles, sauf celui du milieu. Il y a maintenant trois petits triangles coloriés qui se touchent deux à deux par un sommet.
>
> **Étape 2 :** Recommencer avec chacun des petits triangles coloriés obtenus.

Effectuer la construction jusqu'à l'étape 3.

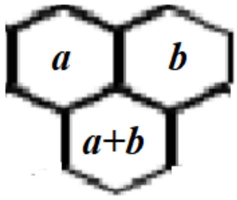
<u>Deuxième partie : Napperon de Sierpinski et triangle de Pascal</u>

On considère le triangle de nombres ci-dessous :



Méthode pour compléter ce triangle :

- Sur la bordure droite et sur la bordure gauche, on complète toutes les cases avec des 1.
- Ensuite, on complète chaque case avec le procédé suivant :



1) Compléter ce triangle.

Ce triangle de nombres est appelé **triangle de Pascal.**

2) **a)** Ecrire à chaque bout de ligne le résultat de la somme de toutes les cases de la ligne.
b) Que remarque-t-on ?

3) Colorier de la même couleur tous les nombres impairs de ce triangle.

4) Que remarque-t-on.

Ce triangle colorié est appelé le **napperon de Siepinski.**

Troisième partie : En lien avec le calcul littéral

1) Développer et réduire les expressions suivantes. On ordonnera les résultats en les rangeant dans l'ordre des puissances de a décroissantes.

$$(a+b)^2 \quad ; \quad (a+b)^3 \quad ; \quad (a+b)^4$$

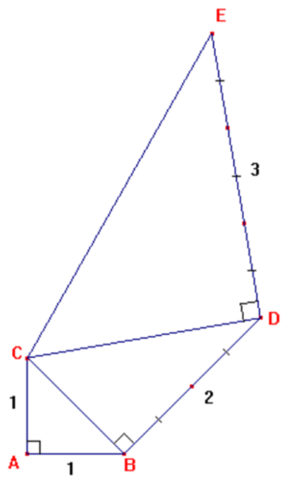
2) Que remarque-t-on ?

3) Développer et réduire $(a+b)^7$.

Fiche de travail - Pythagore

Première partie : Calcul d'une longueur exacte

On considère la figure dont on donne une représentation ci-contre.
L'unité est le centimètre.



1) Montrer que la longueur exacte du segment [CE] est égale à $\sqrt{15}$ cm.

2) Pierre affirme que « Si on voulait un segment de cette longueur, il suffisait de taper $\sqrt{15}$ à la calculatrice et ensuite, on traçait directement le segment de la longueur affichée à la calculatrice ». Qu'en pensez-vous ?

Cette méthode est parfois appelée **« Méthode de l'escargot de Pythagore »**

Deuxième partie : Constructions

1) Construire précisément un segment de longueur $\sqrt{13}$ cm.
2) Construire précisément un segment de longueur $\sqrt{19}$ cm.
3) Construire précisément un segment de longueur $\sqrt{28}$ cm.

Le mathématicien Louis Lagrange a démontré que l'on peut tracer des segments de longueur $\sqrt{a}$, pour tout nombre entier a, en utilisant la méthode de l'escargot de Pythagore avec au plus trois triangles rectangles.

4) Reprendre les questions 1), 2) et 3) en essayant de ne pas faire plus de 3 triangles pour chaque question.

Troisième partie : Vers une propriété

Expliquer pourquoi, il est possible de tracer précisément n'importe quel segment de longueur $\sqrt{a}$, pour tout nombre entier a.

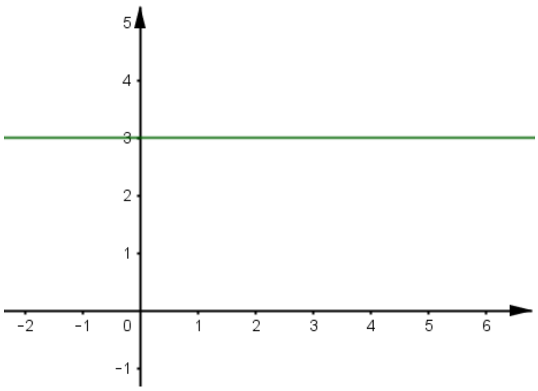
Fiche de travail - Riemann

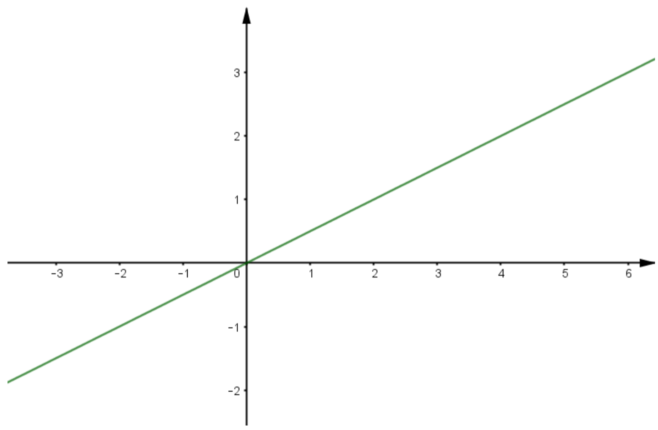
<u>Première partie : La notion d'intégrale</u>

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f : x \mapsto 3 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{2}x$$

Voici les courbes représentatives des fonctions f et g :





1) Déterminer l'aire relative (pouvant être négative) sous la courbe représentative de f pour x allant de 1 à 5.

La valeur de cette aire est appelée l'intégrale de $f(x)$ pour x allant de 0 à 5 et est notée : $$\int_1^5 f(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad \int_1^5 3\,dx$$

2) Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.

3) Calculer $\displaystyle\int_{0}^{6} g(x)\,dx$.

4) Calculer $\displaystyle\int_{3}^{5} g(x)\,dx$.

5) Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{1} g(x)\,dx$.

<u>Deuxième partie : Des calculs d'intégrales</u>

Calculer

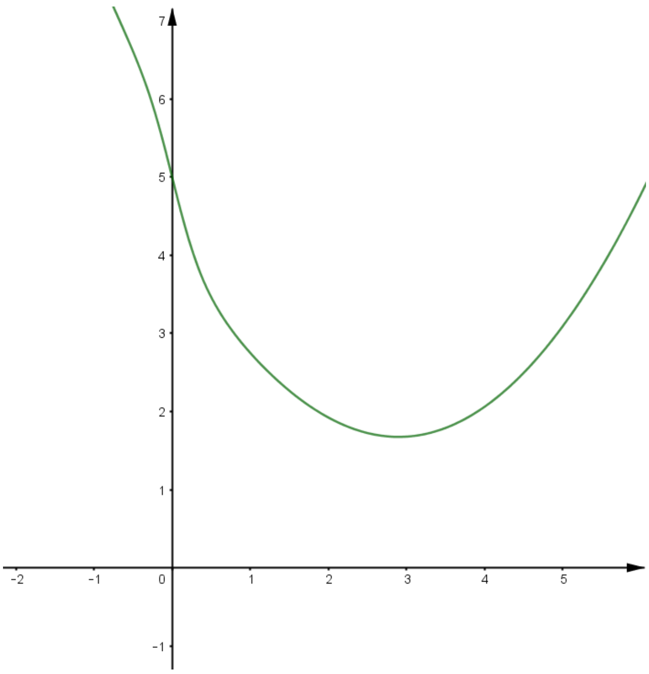
$$\int_1^2 -2x + 5\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{300} 7x\,dx$$

Troisième partie : La méthode de Riemann

On considère la fonctions f par :

$$f : x \mapsto \frac{(x-1)^4 - 2x^3 + 1}{3x^2 + 1}$$

Voici la courbe représentative de la fonction f :



Déterminer une méthode qui permette de déterminer, le plus précisément possible,

$$\int_{0}^{5} f(x)\, dx$$

Fiche de travail - Thalès

<u>Première partie : Une première version du théorème de Thalès</u>

> **<u>Théorème de Thalès :</u>**
> Soit ABC est un triangle.
> Si $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et (MN) // (BC), alors AMN est une réduction de ABC.

1) Représenter cette situation par un dessin.

2) On considère un triangle EFG tel que $EF = 4{,}8$ cm, $FG = 8$ cm et $EG = 6{,}4$ cm.
Soit $I \in [GF]$ tel que $GI = 2{,}5$ cm.
La droite parallèle à (EF) passant par I coupe $[EG]$ en J.
Déterminer le périmètre du triangle IGJ.

<u>Deuxième partie : Une application sur un exemple</u>

1) Construction :

- Tracer un segment [AB] de 10 cm.
- Tracer une demi-droite d'origine A.
- Sur cette demi-droite, placer cinq points A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5, dans cet ordre, tels que :
$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$$
- Relier A_5 avec B
- Tracer la parallèle à (BA_5) passant par A_1. Cette droite coupe $[AB]$ en I_1
- Tracer la parallèle à (BA_5) passant par A_2. Cette droite coupe $[AB]$ en I_2
- Tracer la parallèle à (BA_5) passant par A_3. Cette droite coupe $[AB]$ en I_3
- Tracer la parallèle à (BA_5) passant par A_4. Cette droite coupe $[AB]$ en I_5

2) Calculer AI_1, AI_2, AI_3 et AI_4.

3) Par cette procédure, qu'a-t-on fait avec le segment $[AB]$?

<u>Troisième partie : Un autre exemple, non guidé.</u>

Construire un segment [AB] de 10 cm et, en utilisant uniquement la règle non graduée, l'équerre non graduée et le compas, partager ce segment en 7 parties égales.

<u>Quatrième partie : L'application dans le cas général</u>

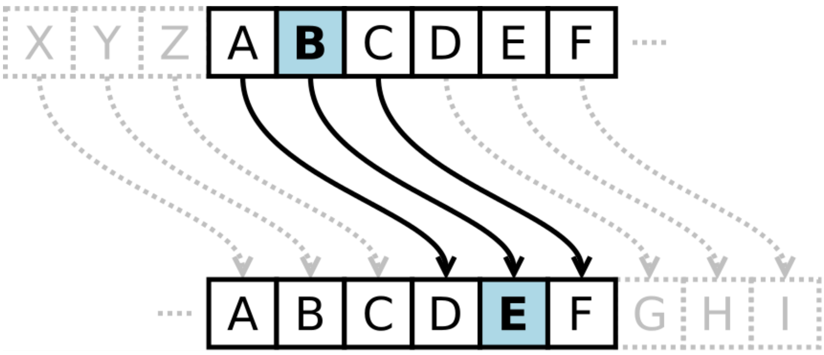
<u>Rédiger</u> une méthode (une procédure) pour partager un segment en n parties égales en utilisant que la règle non graduée, l'équerre non graduée et le compas, puis, **<u>démontrer</u>** qu'avec cette construction, le segment est bien partagé en n parties égales.

Fiche de travail - Alan Turing

<u>**Première partie : Le chiffrement de César.**</u>

En cryptographie, un chiffrement de César, également connu sous le nom de *code de César* (par abus de langage), est l'une des techniques les plus simples et les plus connues de cryptage.
Il s'agit d'un type de chiffrement par substitution, dans lequel on décalle juste d'un certain nombre, les lettres de l'alphabet.
Il s'agit d'une *permutation circulaire* de l'alphabet.

- **Par exemple, avec un décalage de 3**: (c'est le code de César original)
  - A serait remplacé par D,
  - B deviendrait E,
  - [...]
  - Y devient B,
  - et Z devient C.



1) A l'aide de ce code de César, coder la phrase suivante :

Je suis fan des maths

2) Maintenant, on considère un code de César différent (avec un décalage autre que 3).
Décoder le message suivant :

Jl wyvqla lza zbwly

<u>**Deuxième partie : Le chiffrement affine**</u>

Le **chiffre affine** est une variante du chiffre de César, très pratique à mettre en oeuvre sur un ordinateur car il se réduit à des calculs sur des nombres entiers. On commence par remplacer chaque lettre par son ordre dans l'alphabet, auquel, pour des raisons techniques, on enlève 1 : A devient 0, B devient 1,..., Z devient 25. On choisit ensuite deux nombres entiers a et b qui sont la clé de chiffrement. Le nombre x est alors codé par $ax + b$. Ce nombre n'étant pas forcément compris entre 0 et 25, on prend son reste r dans la division par 26. Et ce nombre r est à son tour remplacé par la lettre qui lui correspond.

Ainsi, dans le chiffre affine, une lettre est toujours remplacée par la même lettre : il s'agit bien d'un chiffrement par substitution mono-alphabétique.

On souhaite coder le mot ELECTION avec le choix $a = 3$, $b = 5$.
Donc applique la fonction $x \mapsto 3x + 5$ aux nombres de départ

Message initial	E	L	E	C	T	I	O	N
Étape 1 : en nombres	4	11	4	2	19	8	14	13
Étape 2 : après chiffrement	17	38	17	11	62	29	47	44
Étape 3 : reste de la division par 26	17	12	17	11	10	3	21	18
Message chiffré	R	M	R	L	K	D	V	S

- **Étape 1 :** On remplace les lettres par leur nombre associé : 4,11,4,2,19,8,14,13.
- **Étape 2 :** On calcule pour chaque nombre $ax + b$: Par exemple, pour le premier nombre x_1=4, on obtient y_1=17. De même, y_2=38, y_3=17, y_4=11, y_5=62, y_6=29, y_7=47, y_8=44.
- **Étape 3 :** On prend les restes dans la division par 26, et on trouve : z_1=17, z_2=12, z_3=17, z_4=11, z_5=10, z_6=3, z_7=21, z_8=18.
- **Étape 4 :** On retranscrit en lettres, remplaçant 17 par R, etc… On trouve RMRLK DVS.

Remarque :
Toutes les valeurs de a ne sont pas autorisés pour le chiffrement affine. Imaginons en effet que $a = 2$ et $b = 3$.
Alors,

- la lettre A est remplacée par 0, chiffrée en 2*0+3=3, c'est-à-dire que A est chiffrée par D.
- la lettre N est remplacée par 13, chiffrée en 2*13+3=29, dont le reste dans la division par 26 est 3 : N est également remplacé par D.

Ainsi, la valeur a=2 ne convient pas, car deux lettres sont chiffrées de la même façon, et si on obtient un D dans le message chiffré, on ne pourra pas savoir s'il correspond à un A ou à un N.
Avec un peu d'arithmétique, on peut prouver que a convient s'il n'est pas divisible par 2 ou par 13. On peut choisir en revanche pour b n'importe quelle valeur.

1) Coder le mot « MATHS » avec le chiffre affine $a = 7$ et $b = 1$.

2) On considère maintenant un autre chiffrement affine.
Décoder le message suivant :

IN HWZNO NDG ENBJ

Fiche de travail - Venn

Première partie : Un problème à résoudre

Dans un groupe de personnes ayant tous au moins un animal :

- 20 personnes ont un chat
- 19 personnes ont un chien
- 12 personnes ont un poisson rouge
- 12 personne ont seulement un chat (pas de chien ni de poisson rouge).
- 8 personne ont seulement un chien (pas de chat ni de poisson rouge).
- 2 personnes ont un chat, un chien et un poisson rouge.
- 4 personnes ont seulement un chat et un chien et pas de poisson rouge.

Combien de personnes ont seulement un poisson rouge (pas de chat ni de chien) ?

Deuxième partie : Une schématisation bien pratique

Un **diagramme de Venn** (également appelé **diagramme logique**) est un diagramme qui montre toutes les relations logiques possibles dans une collection finie de différents ensembles. Les diagrammes de Venn ont été conçus autour de 1880 par John Venn. Ils sont utilisés pour enseigner la théorie des ensembles élémentaires, ainsi qu'à illustrer des relations simples en probabilité, logique, statistiques, linguistique et en informatique.

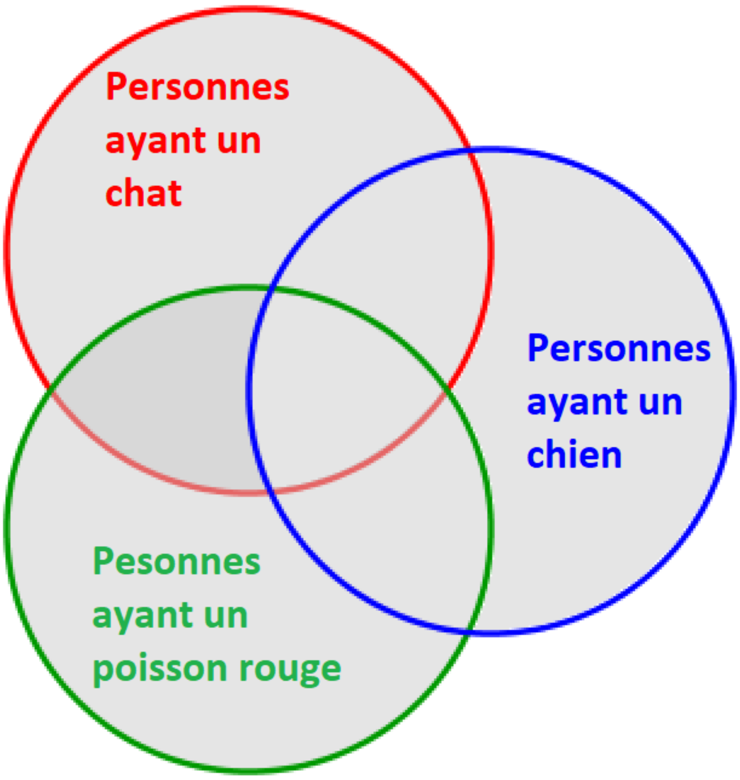


Diagramme de Venn

Document réalisé par Morgan Gilot, Académie d'Orleans-Tours

Troisième partie : Intersection et réunion de deux ensembles

Maintenant, on dit que A et B sont deux ensembles.

Définitions :

On appelle **intersection** de A et B l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A **et** dans B. On note l'intersection de A et B : $A \cap B$.

On appelle **réunion** de A et B l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A **ou** dans B. On note la réunion de A et B : $A \cup B$.

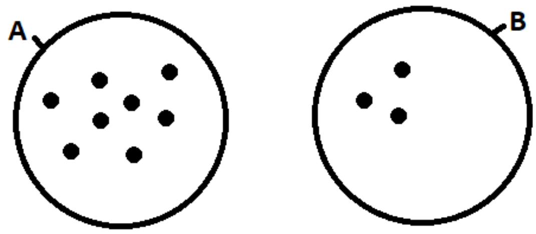
A l'aide des diagrammes de Venn, représenter $A \cap B$ et $A \cup B$.

Quatrième partie : Cardinal d'un ensemble

Définition : On appelle cardinal d'un ensemble le nombre d'éléments de cet ensemble.
On note le cardinal d'un ensemble A : $Card(A)$.

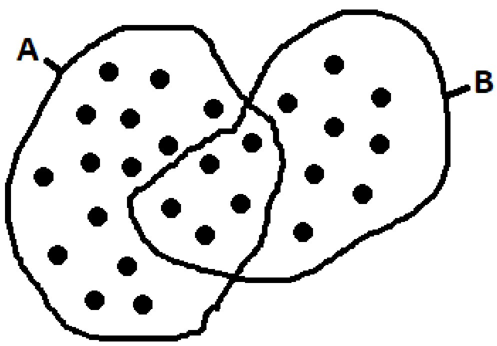
1) On considère l'ensemble $A = \{e\,; k\,; p\,; l\,; m\,; v\}$.
Quel est son cardinal ?

2) On considère la configuration ci-dessous où un élément est représenté par un point.



a) Déterminer $Card(A)$ et $Card(B)$.
b) Déterminer $Card(A \cup B)$
c) Exprimer $Card(A \cup B)$ en fonction de $Card(A)$ et $Card(B)$.

3) On considère maintenant la configuration ci-dessous :



a) La formule donnée à la question 2.c) est-elle toujours valable ? Pourquoi ?
b) Donner une formule pour calculer $Card(A \cup B)$ dans ce cas-là. Est-elle encore valable pour le cas de la question 2) ?