Concours Fesic mai 2012

Calculatrice interdite ; traiter 12 *exercices sur les* 16 *en* 2 *h* 30 *; répondre par Vrai ou Faux sans justification.* +1 *si bonne réponse,* −1 *si mauvaise réponse,* 0 *si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.*

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{\star}$ par $f(x) = \dfrac{(1-x)\left(1-\mathrm{e}^{x}\right)}{x}$.

a. On a : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

b. On a : $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$.

c. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = -1$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$

d. On a : $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} (n-1)\left(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) = -1$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} + 1\right)$.

a. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$

b. On a : $f(x) < 0$ si et seulement si $x < 0$.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{\star}$, on peut écrire $f(x) = 2\ln\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.

d. La courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan possède pour asymptotes les axes du repère et la droite d'équation $y = 2x$.

EXERCICE 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, on définit la fonction f_n, sur $]0~;~+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(x) + 2\ln(n) - nx$ et on appelle C_n la courbe représentant f_n, dans un repère orthonormal du plan.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$ et tout $x \in]0~;~+\infty[$, on a : $f_n'(x) = \dfrac{n+2x-xn^2}{nx}$.

b. On fixe n dans $\mathbb{N}^{\star}$; f_n est décroissante sur $]0~;~+\infty[$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$ on appelle M_n l'extremum de la courbe C_n. On note $\left(x_n~;~y_n\right)$ les coordonnées de M_n.
La suite $\left(x_n\right)_n$ est décroissante et la suite $\left(y_n\right)_n$ est croissante.

d. On fixe n dans $\mathbb{N}^{\star}$. La fonction F_n définie par : $F_n(x) = x\ln x - x + 2x\ln n - nx$ est la primitive de f_n sur $]0~;~+\infty[$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

EXERCICE 4

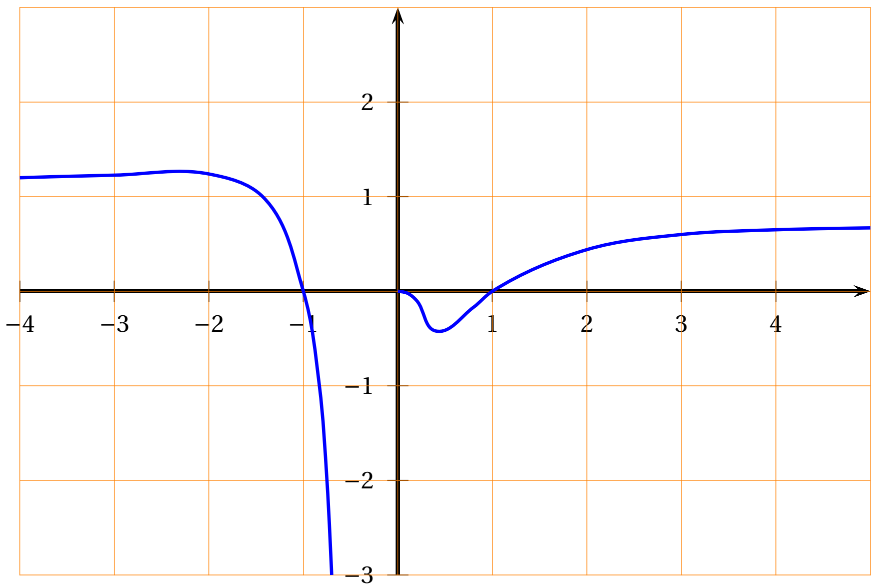
On considère la représentation graphique suivante d'une fonction f.
On appelle C la courbe représentant f et on suppose que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à C aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
On appelle f' la dérivée de f lorsqu'elle existe.

a. La limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 existe.

b. Quand x_0 tend vers 0 par valeurs positives, $\displaystyle\int_{x_0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire, en unités d'aire, de la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses.

c. La limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 1.

d. Entre 0 et 4, la fonction f' est décroissante, puis croissante, puis à nouveau décroissante.



EXERCICE 5

a. On a : $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\pi} + 1$.

b. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on a : $\displaystyle\int_{-a}^{a} t^3 \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = 0$.

c. La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^{\star}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^{\star}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par $f'(x) = \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}(x + 1 - \ln x)$.

d. La suite u définie sur $\mathbb{N}^{\star}$ par $u_n = \left(n^2 - 1\right)\sqrt{n}$ est croissante.

EXERCICE 6

a. On cherche l'ensemble de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{15 + 2x - x^2}{x^2 + 10x + 21}\right).$$

On tient pour cela le raisonnement suivant :

« f est définie si et seulement si on a $\dfrac{15 + 2x - x^2}{x^2 + 10x + 21} > 0$. Or $15 + 2x - x^2 = (3 + x)(5 - x)$ et $x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7)$. Il faut donc et il suffit d'avoir $\dfrac{5 - x}{x + 7} > 0$, soit $x \in]-7\,;\,5[$.

Conclusion : l'ensemble de définition cherché est $]-7\,;\,5[$. » Ce raisonnement est exact.

b. On considère la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}_+^{\star}$ par $f(x) = x^2 - x\ln\left(x^2\right)$.

On cherche à montrer que f est croissante sur I. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« f est dérivable sur I. Pour $x \in I$, on a $f'(x) = 2(x - 1 - \ln x)$. Or la représentation graphique de la fonction ln est située en dessous de ses tangentes en tout point. En particulier, elle est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1 qui est la droite d'équation $y = x - 1$.

On en déduit que, quel que soit $x \in I$, on a : $\ln x \leqslant x - 1$. Il s'ensuit que l'on a : $f'(x) > 0$. Ceci étant vrai pour tout $x \in I$, on en déduit que f est croissante sur I. » Ce raisonnement est exact.

c. On considère quatre points A, B, C et D de l'espace, deux à deux distincts. On appelle I le milieu de [AB] et, pour tout $m \in \mathbb{R}$, on appelle G_m, le barycentre de $\{(\text{A},\ 1), (\text{B},\ 1), (\text{C},\ m-2), (\text{D},\ m)\}$.

On cherche à montrer que, quel que soit $m \in \mathbb{R}$, G_m est situé dans le plan (ICD). On tient pour cela le raisonnement suivant :

« I est le milieu de [AB], donc I est le barycentre de $\{(\text{A},\ 1), (\text{B},\ 1)\}$. Quel que soit $m \in \mathbb{R}$, et par associativité du barycentre, G_m est alors le barycentre de $\{(\text{I},\ 2), (\text{C},\ m-2), (\text{D},\ m)\}$.

On en déduit que G_m appartient au plan (ICD). » Ce raisonnement est exact.

d. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \text{e}^{-x} - \ln x - x$. On considère la rédaction suivante qui donne le sens de variation de f.

« $f(x)$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et, pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$, on a $f'(x) = -\text{e}^{-x} - \dfrac{1}{x} - 1$.
$f'(x)$ est la somme de trois nombres négatifs, donc on a : $f'(x) < 0$. Il s'ensuit que $f(x)$ est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$. » Cette rédaction est rigoureuse.

EXERCICE 7

On considère l'équation différentielle [E] : $y' + 2y = 4$.

a. Soit z une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. z est solution de [E] si et seulement si $z-2$ est solution de l'équation $y' + 2y = 0$.

b. L'application f, définie par $f(x) = 2\left(1 - \text{e}^{2(1-x)}\right)$ est une solution de [E].

c. L'application g, définie par $g(x) = 2 - \text{e}^{2x+4}$ est la solution de [E] vérifiant $g(-2) = 1$.

d. L'application h, définie par $h(x) = 2 + \left(\dfrac{1}{\text{e}^{x+1}}\right)^2$ est la solution de [E] vérifiant $h'(-1) = -2$.

EXERCICE 8

On étudie l'évolution de deux fourmilières A et B.
Chaque mois, 20 % des fourmis de A passent en B et 30 % des fourmis de B passent en A.
Au bout d'un nombre de mois égal à n, on note u_n et v_n le nombre total (en milliers de fourmis) de fourmis présentes respectivement dans les fourmilières A et B.
On a dénombré que, initialement, on avait $u_0 = 320$ et $v_0 = 180$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{4}{5}u_n + \dfrac{3}{10}v_n \\ v_{n+1} & = & \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{7}{10}v_n. \end{array}\right.$

b. La suite $s = u + v$ est une suite constante.

c. La suite $t = -2u + 3v$ est géométrique de raison 1 et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_n = \dfrac{-100}{2^n}$.

d. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = 200 - \dfrac{20}{2^n}$.

EXERCICE 9

Soit u une suite numérique dont aucun terme n'est nul. On définit la suite v par : $v_n = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

a. Si u est convergente, alors v est convergente.

b. Si u est minorée par 1, alors v est majorée par 2.

c. Si u est majorée par 0,5 alors v est minorée par 3.

d. On suppose ici que u est définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$. Alors v est une suite géométrique.

EXERCICE 10

On considère les suites u et v définies par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.

a. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b. La suite v est croissante.

c. Les suites u et v sont adjacentes.

d. Quel que soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $2 \leqslant u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \leqslant 3$.

EXERCICE 11

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on appelle A le point dont l'affixe est $-\text{i}$.
Pour tout point M distinct de A, d'affixe $z = x + \text{i}y$ (écriture algébrique), on associe le point M' d'affixe $z' = x' + \text{i}y'$ (écriture algébrique) telle que : $z' = \dfrac{z}{z + \text{i}}$.

a. On a : $x' = \dfrac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + (y+1)^2}$.

b. On a : $\overline{z'} = \dfrac{z}{z + \text{i}}$.

c. L'ensemble des points M tels que $z' = \overline{z'}$ est l'axe des ordonnées privé du point A.

d. M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1 si et seulement si M appartient à la médiatrice de [OA].

EXERCICE 12

Soit a un nombre complexe non réel.
Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe a, le point B d'affixe $\text{i}a$, le point C d'affixe $-a$ et le point D dont l'affixe est le conjugué de a.

a. C est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

b. On a : $\left(\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DC}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

c. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - a| = |z + a|$ est la droite (AC).

d. Les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle.

EXERCICE 13

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soient
$Z = \dfrac{1 + \text{i}\sqrt{3}}{2 - 2\text{i}}$ et M le point du plan d'affixe Z.

a. Le complexe $2 - 2\text{i}$ est de module $2\sqrt{2}$ et l'un de ses arguments est $\dfrac{\pi}{4}$.

b. On a : $\text{O}M = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{O}M}\right) = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $Z^n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\cos\left(\dfrac{7n\pi}{12}\right) + \text{i}\sin\left(\dfrac{7n\pi}{12}\right)\right)$.

d. Il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que le point M_n d'affixe Z^n appartienne à l'axe des abscisses.

EXERCICE 14

Le code d'entrée dans un immeuble est composé de quatre chiffres.

a. II y a 9 999 codes différents.

b. Pour éviter les erreurs de saisie, certains occupants demandent qu'un même chiffre ne puisse pas être répété deux fois consécutivement.
Il y a alors 7 290 codes différents possibles.

c. Certains occupants préféreraient que les 4 chiffres soient tous différents. II y aurait alors $\binom{10}{4}$ codes différents possibles.

d. Comme cet immeuble est situé à Paris, certains occupants souhaitent que le code choisi contienne le nombre « 75 ». Il y aurait alors 168 codes différents possibles.

EXERCICE 15

On considère un espace probabilisé $(\Omega,\ p)$ et deux évènements A et B dans Ω.
On sait que $p(A) = \dfrac{1}{5}$, que $p_A(B) = \dfrac{1}{3}$ et que $p\left(\overline{A} \cap B\right) = \dfrac{2}{3}$.

a. On a : $p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{5}{6}$;

b. On a : $p\left(A \cap \overline{B}\right) = \dfrac{1}{3}$;

c. On a : $p(B) = \dfrac{11}{15}$.

d. On a : $p_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{2}{15}$.

EXERCICE 16

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les plans P et Q d'équations respectives : P : $y = x + 2$ et Q : $z = 3 - 2y$.
On appelle (D) la droite d'intersection de P avec Q.

a. La droite (D) accepte pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$.

b. La droite (D) passe par le point A(- 1 ; 1 ; 1).

c. Une équation du plan contenant la droite (D) et passant par O est :
$3x + y + 2z = 0$.

d. La droite (D) coupe l'axe des ordonnées.