↫ Concours Fesic mai 2011 ↬

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$.

a. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

d. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xf(x) = -\infty$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D} =]-1~;~1[$ par $f(x) = x + \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère du plan.

a. $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b. Quel que soit $a \in \mathcal{D}$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

c. f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et, quel que soit $x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2-1}$.

d. Un énoncé peut demander, sans erreur de rigueur mathématique, d'« étudier le sens de variation de $f(x)$ ».

EXERCICE 3

Soient f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_1(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$ et f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$.
On appelle $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentant respectivement f_1 et f_2 dans un même repère du plan et on appelle Δ la droite d'équation $y = x$.

a. Au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_1$ possède l'asymptote d'équation $y = x - 1$.

b. Quel que soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $f_2 \circ f_1(x) = x$.

c. Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose qu'au point $A\left(a~;~f_1(a)\right)$, $\mathcal{C}_1$ possède une tangente de coefficient directeur α.
Il existe un point de $\mathcal{C}_2$ en lequel $\mathcal{C}_2$ possède une tangente de coefficient directeur $\dfrac{1}{\alpha}$.

d. Pour montrer que Δ est asymptote à $\mathcal{C}_2$ au voisinage de $+\infty$, un élève peut écrire, sans erreur de rigueur mathématique, « je vais montrer que $\lim \left(f_2(x) - \Delta\right) = 0$ ».

EXERCICE 4

Soit f_1 la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f_1(x) = x\ln(1+x)$.
Soit f_2 la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f_2(x) = x\ln(x)$ si $x \neq 0$ et $f_2(0) = 0$.
On appelle $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentant respectivement f_1 et f_2 dans un même repère orthogonal du plan d'unités 3 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

a. f_2 est continue en 0.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)=0$.

c. On considère la surface délimitée par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'une part et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\text{e}$ d'autre part.
L'aire de cette surface en cm^2 est $\displaystyle\int_1^{\text{e}} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\,\text{d}x$.

d. $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ possèdent deux tangentes parallèles entre elles au point d'abscisse 0.

EXERCICE 5

On considère l'équation différentielle [E] : $y'-2y=(2x-1)\text{e}^x$. On appelle f la solution de [E] qui s'annule en 0.

a. La courbe représentant f dans un repère du plan possède une tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y=x$.

b. Quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\text{d}t+\int_0^x(2t-1)\text{e}^t\,\text{d}t$.

c. Si $f'(x)$ possède une limite finie quand x tend vers $-\infty$, alors $f(x)$ possède une limite finie quand x tend vers $-\infty$.

d. La fonction f, définie par $f(x)=\text{e}^{2x}+(2x-1)\text{e}^x$, est la fonction définie dans l'énoncé.

EXERCICE 6

a. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\text{e}^{\frac{-1}{x}}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.
On cherche à savoir si f est continue en 0. On tient pour cela le raisonnement suivant : « On a $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{x}=-\infty$. On en déduit $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.
Comme on a posé $f(0)=0$, on en déduit que f est continue en 0. »
Ce raisonnement est exact.

b. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x\ln x$ si $x>0$ et $f(0)=0$.
On cherche à savoir si f est dérivable en 0 à droite. On tient pour cela le raisonnement suivant :
« f est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. Pour tout $x>0$, on a $f'(x)=1+\ln x$.
Or la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0 ($x>0$) n'est pas un nombre réel.
Cela suffit pour en déduire que f n'est pas dérivable en 0 à droite. »
Ce raisonnement est exact.

c. On cherche à calculer la limite éventuelle de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.
On tient pour cela le raisonnement suivant :
« Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)$. On sait que f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ et que, pour $x>-1$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$. Or, en utilisant le changement de variable $x=\dfrac{1}{n}$, on obtient :
$\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=f'(0)=1$.
De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\text{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Compte tenu de ce qui précède, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{t\to1}\text{e}^t=\text{e}$.
Conclusion : la limite cherchée existe et vaut e. »
Ce raisonnement est exact.

d. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A d'affixe $z_{\text{A}} = 1 - \text{i}$, B d'affixe $z_{\text{B}} = 3 + 3\text{i}$ et C tel que ABC soit équilatéral direct.

Pour calculer l'affixe z_{C} de C, on rédige de la façon suivante :

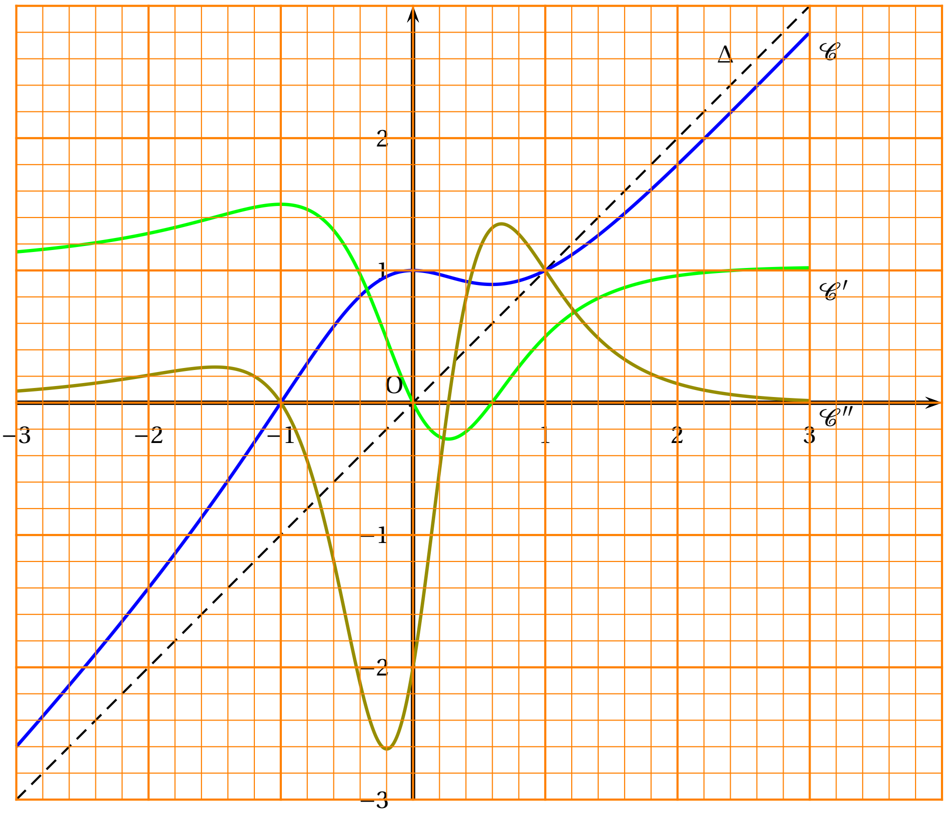
« C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, donc $\overrightarrow{\text{AC}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\overrightarrow{\text{AB}}$. On en déduit :

$z_{\text{C}} - z_{\text{A}} = \left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_{\text{B}} - z_{\text{A}})$, soit, après calculs, $z_{\text{C}} = \left(2 - 2\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)$. »

La rédaction utilisée est rigoureuse.

EXERCICE 7

On a représenté, ci-dessous, la droite Δ d'équation $y = x$ et les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ représentant respectivement une fonction f, sa dérivée f' et la dérivée f'' de f'.



a. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

b. Quel que soit le point M de $\mathscr{C}$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en M est inférieur à $\dfrac{3}{2}$.

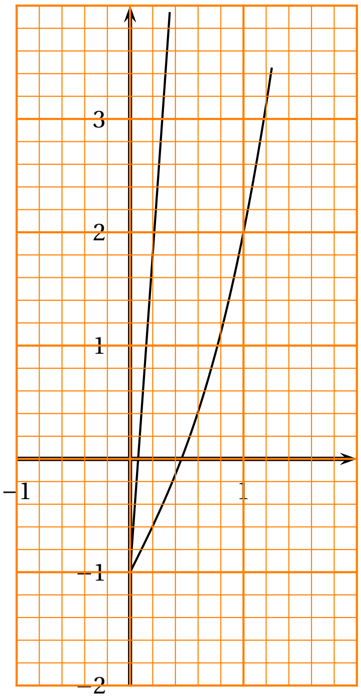
c. $\displaystyle\int_{-1}^{0} f'(x)\,\text{d}x = 1$.

d. L'aire, en unités d'aire, de la surface limitée par les courbes $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ d'une part, et les droites d'équation $x = -1$, $x = 0$ d'autre part, vaut $f'(-1) + f(0)$, soit 2,5.

EXERCICE 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^3 + 2nx - 1$ et on appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe associée à f_n dans un repère du plan.

On admet que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $[0\,;\,1]$; cette solution (dont la valeur dépend de n) sera notée α_n.
À titre d'exemple, on a schématisé ci-dessous deux courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_m$.



a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ est au-dessus de $\mathscr{C}_{n+1}$.

b. La suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante.

c. La suite $(\alpha_n)_n$ est convergente.

d. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n\alpha_n = 0$.

Exercice 9

On considère les suites u et v définies respectivement sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

a. La suite u est croissante.

b. La suite $u+v$ est constante.

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

d. La suite u converge vers 1.

Exercice 10

a. On suppose que u est une suite réelle croissante.
On peut écrire, sans erreur de rigueur mathématique, que « quel que soit $n \in \mathbb{N}$, u_n est croissant ».

b. On suppose que u est une suite réelle strictement croissante.
On peut écrire, sans erreur de rigueur mathématique, que
« quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $(u_n)_n < (u_{n+1})_n$ ».

c. On suppose que u et v sont deux suites réelles qui possèdent la même limite.
Alors on a nécessairement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

d. On suppose que u est une suite réelle.
u est bornée si et seulement si la suite de ses valeurs absolues est majorée.

EXERCICE 11

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^4 - \mathrm{i}z^2 + 2$.

a. L'équation $f(z) = 0$ possède les solutions $1 + \mathrm{i}$ et $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

b. Le produit des solutions de l'équation $f(z) = 0$ est égal à 2.

c. Quel que soit $z \in \mathbb{C}$, $f\left(\overline{z}\right) = \overline{f(z)}$.

d. Si $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et si $|z| = \rho$, alors $|f(z)| = \rho^4 - \rho^2 + 2$.

EXERCICE 12

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Soient $a = 2 - \mathrm{i}$ et $b = -1 + \mathrm{i}$.
On considère les points U, A, A' et B d'affixes respectives $\dfrac{1}{2}$, a, $\overline{a}$ et b.
On appelle C le point d'affixe c tel que B soit l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. L 'homothétie de centre U et de rapport -1 transforme A en B.

b. On a $c = -1 - \mathrm{i}$.

c. Le quadrilatère $AA'BC$ est un rectangle.

d. Les points A, A', B et C sont cocycliques.

EXERCICE 13

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On appelle A le point d'affixe $-\mathrm{i}$.
À tout point M d'affixe z, distinct de A et de O, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z}{z+\mathrm{i}}$.

a. On a $\mathrm{O}M' = \dfrac{\mathrm{O}M}{\mathrm{A}M}$.

b. $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{O}M}, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) \quad [2\pi]$.

c. Si M' est un point du cercle de centre O et de rayon 1, alors M est sur une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

d. Si M' est sur l'axe des ordonnées, alors M est sur le cercle de diamètre [OA].

EXERCICE 14

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.
Une urne contient :

- n boules blanches, dont 2 sont numérotées 1, les autres étant numérotées 2 ;
- $n + 1$ boules rouges, dont 3 sont numérotées 1, les autres étant numérotées 2 ;
- $n + 2$ boules noires, dont 4 sont numérotées 1, les autres étant numérotées 2.

Toutes les boules sont indiscernables entre elles au toucher.
On prélève successivement, avec remise intermédiaire, 3 boules de l'urne.
On appelle A l'évènement : « les trois boules tirées sont de la même couleur ».

a. La probabilité d'obtenir A est $\dfrac{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}{27(n+1)^3}$.

b. L'évènement contraire de A est : « les trois boules tirées sont de couleur deux à deux distincte ».

c. La probabilité que les trois boules tirées soient rouges est constante.

d. La probabilité que les trois boules tirées soient de couleur différente et portent chacune le numéro 1 est $\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n+1}+\dfrac{4}{n+2}$.

EXERCICE 15

a. La durée de vie d'un appareil électronique est une variable aléatoire qui suit une loi sans vieillissement de paramètre $0,03$.

Soient t et h deux réels positifs.

Sachant que l'appareil fonctionne à l'instant t, la probabilité qu'il fonctionne encore à l'instant $t+h$ est $1-\mathrm{e}^{0,03h}$.

b. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que la probabilité d'avoir $X \leqslant 5$ est $0,2$.

On a $\lambda = \dfrac{\ln 0,8}{\ln 5}$.

c. Une variable aléatoire X qui suit une loi sans vieillissement de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

La probabilité d'avoir X supérieur ou égal à $\ln 4$ est égale à la probabilité d'avoir X inférieur à $\ln 4$.

d. Soient deux réels a et b, $a<b$. Une variable aléatoire X suit une loi de répartition uniforme sur $[a\,;\,b]$.

On sait que la probabilité d'avoir X compris entre 0 et 5 est $0,2$.

On a nécessairement $a=0$ et $b=25$.

EXERCICE 16

L'espace est muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-2y+2z-1=0$, les points A$(1\,;1\,;1)$, B$(-1\,;\,5\,;\,-3)$ et C$(3\,;0\,;5)$.

a. Une équation du segment [AB] est $\left\{\begin{array}{lll} y & = & 1+t \\ y & = & 1-2t \\ .z & =1+2t & \end{array}\right.$, avec $t \in [0\,;\,1]$.

b. La distance de B à $\mathcal{P}$ est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

c. La sphère de centre A passant par B coupe le plan $\mathcal{P}$ en un cercle de centre A et de même rayon.

d. L'isobarycentre de {A, B, C} est un point de $\mathcal{P}$.