∽ Concours Fesic mai 2010 ∾

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

On appelle D l'ensemble de définition de f.

a. $D =]-1\ ;\ +1[$.

b. f est paire.

c. f est décroissante sur D.

d. Quel que soit le réel b, l'équation $f(x) = b$ possède l'unique solution $x = \dfrac{\mathrm{e}^{2b}-1}{\mathrm{e}^{2b}+1}$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x+1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0\\ f(0) = 0 \end{array}\right.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère du plan.

a. f est continue en 0.

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour $x \neq 0$, $f'(x)$ est du signe de x.

c. $\mathscr{C}$ possède la même droite pour asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

d. Quel que soit le réel x, on a $f(x) < 1$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = \sin(\ln t).$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan.

Soit F la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. On a $f(\mathrm{e}) = \dfrac{\pi}{2}$.

b. Si $t \in [1\ ;\ \mathrm{e}^{\pi}]$, alors on a $f(t) \geqslant 0$.

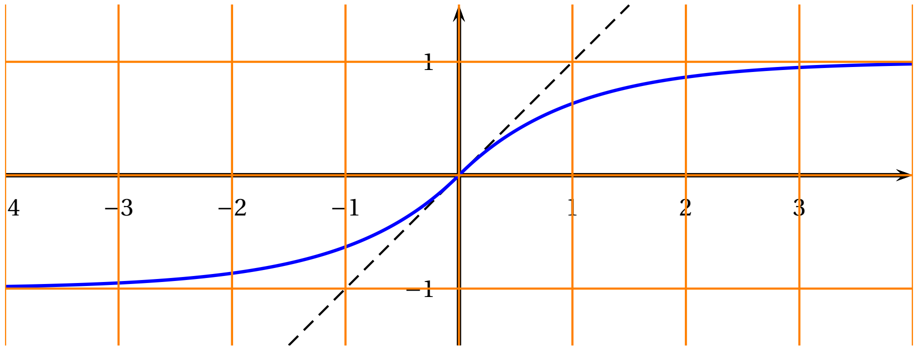
c. $F(\mathrm{e}^{\pi})$ représente l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 1$, $x = \mathrm{e}^{\pi}$ et $y = 0$.

d. Quel que soit $x > 1$, on a $F'(x) \leqslant 1$.

EXERCICE 4

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On appelle Γ la courbe représentant f et $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction dérivée f' de f. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ de f' : $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère. La droite Δ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



a. La courbe Γ de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

c. La courbe Γ possède une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

d. On a $f''(0) = 1$.

EXERCICE 5

a. $\displaystyle\int_{-5}^{7} |x|\,\mathrm{d}x = 12$.

b. $\displaystyle\int_{0}^{1} (2x+5)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 5\mathrm{e} - 3$.

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}{x} = 2$.

d. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\sin^2 x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x\sin^2 x + x^2\cos 2x$.

EXERCICE 6

a. On considère un tétraèdre ABCD. On appelle I le milieu de [AD], J celui de [BC], K le barycentre de $\{(\mathrm{A}, 2), (\mathrm{B}, 1)\}$, L le barycentre de $\{(\mathrm{C}, 1), (\mathrm{D}, 2)\}$ et G le barycentre de $\{(\mathrm{A}, 2), (\mathrm{B}, 1), (\mathrm{C}, 1), (\mathrm{A}, 2)\}$.

On veut montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« G est le barycentre de (I, 4), (J, 2) et de (K, 3), (L, 3). Donc G, I et J sont alignés, ainsi que G, K et Z sont alignés. On en déduit que I, J, K et L sont coplanaires.»

Ce raisonnement est exact.

b. On considère les deux intégrales $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \dfrac{\mathrm{e}^{x}+3}{\mathrm{e}^{x}+4}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+4}\,\mathrm{d}x$.

On veut calculer I et J. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« On a $\mathrm{I} + \mathrm{J} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \dfrac{\mathrm{e}^{x}+4}{\mathrm{e}^{x}+4}\,\mathrm{d}x = \ln 8 - \ln 2 = 2\ln 2$.

De plus, $\mathrm{I} - 3\mathrm{J} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+4}\,\mathrm{d}x = \left[\ln\left(\mathrm{e}^{x}+4\right)\right]_{\ln 2}^{\ln 8} = \ln 12 - \ln 6 = \ln 2$.

On en déduit $\mathrm{I} = \dfrac{7\ln 2}{4}$ et $\mathrm{J} = \dfrac{\ln 2}{4}$ ».

Ce raisonnement est exact.

c. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x) = x\ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère du plan.

On cherche à savoir si $\mathscr{C}$ possède ou non une demi-tangente au point d'abscisse 0. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« On sait que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (limite de référence). Comme $f(0) = 0$, c'est que f est continue en 0. De plus on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$. On en déduit que $\mathscr{C}$ possède au point d'abscisse 0 une demi-tangente d'équation $x = 0$. » Ce raisonnement est exact.

d. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère. On cherche à savoir si $\mathscr{C}$ possède ou non une tangente au point d'abscisse 0. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« Pour tout $x \neq 0$, on a : $-1 < \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) < 1$, donc $-x^2 < f(x) < x^2$. Or $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\right) = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Comme $f(0) = 0$, c'est que f est continue en 0. De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Or on a $-x \leqslant 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x$ si $x > 0$ et $x \leqslant 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant -x$ si $x < 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Mais comme $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'existe pas, alors $f(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0. Donc f n'est pas dérivable en 0. On en déduit que $\mathscr{C}$ ne possède pas de tangente au point d'abscisse 0 ». Ce raisonnement est exact.

EXERCICE 7

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
À chaque point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = z^2 + z + 1$.
On appelle A le point d'affixe 1 et on note E_0 l'ensemble des points dont l'affixe z est solution de l'équation $z' = 0$.

a. Pour tout z différent de 1, on a $z' = \dfrac{1-z^3}{1-z}$.

b. L'ensemble E_0 est réduit à deux points B et C symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe $\left(\text{O}\,;\vec{u}\right)$.

c. Quel que soit le point M d'affixe z appartenant à E_0 et quel que soit l'entier n, z_n est soit l'affixe du point A, soit celle d'un élément de E_0.

d. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $z' \in \mathbb{R}$ est la réunion de deux droites perpendiculaires.

EXERCICE 8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$(\text{E}) : \quad z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0.$$

a. Les complexes $-1 + 2\text{i}$ et son conjugué sont solutions de (E).

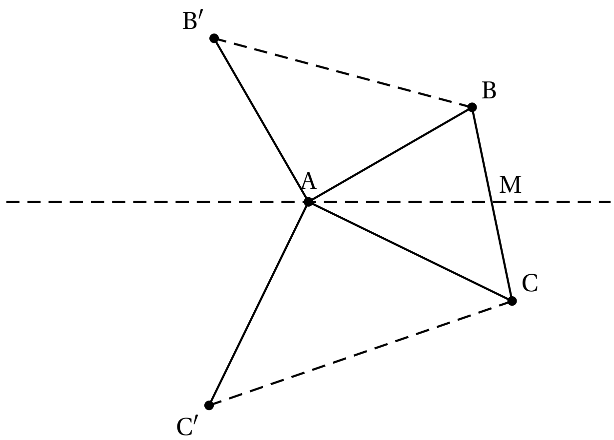
b. Cette équation est une équation polynômiale de degré 2 qui possède deux solutions.

c. On pose $z = x + \text{i}y$, x et y étant réels. Si z est solution de (E), alors $y^2 = (x-1)^2$.

d. La somme des solutions de (E) est égale à -1.

EXERCICE 9

On considère un triangle ABC et le point M milieu de [BC].
On appelle B′ l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et C′ l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
On munit le plan complexe d'un repère de centre A dans lequel B, C, B′, C′ et M ont les affixes respectives b, c, b', c' et m.



a. $c' + \mathrm{i}c = 0$ et $b' - \mathrm{i}b = 0$.
b. $\dfrac{c' - b'}{m} = -2\mathrm{i}$.
c. (AM) et (B′C′) sont perpendiculaires.
d. B′C = 2AM.

EXERCICE 10

Soient $a \in \mathbb{R}$ et φ une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle [E] :

$$y' + ay = \varphi(x).$$

a. Si φ est définie par $\varphi(x) = x^3 - 1$, alors quel que soit le réel a, il existe un polynôme de degré 2, solution de [E].
b. Si φ est définie par $\varphi(x) = \mathrm{e}^{2x}$, alors quel que soit le réel a, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que la fonction f, définie par $f(x) = b\mathrm{e}^{2x}$ soit solution de [E].
c. Si φ est la fonction constante nulle et si f est une solution de [E], alors la courbe représentant f possède au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = (1 - ax)f(0)$.
d. Si $a = 0$, alors quelle que soit la fonction φ définie et continue sur $\mathbb{R}$, [E] possède une solution.

EXERCICE 11

On considère la suite u définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}*$, $u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n$.

a. La suite u est géométrique de raison $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$.
b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}*$, $u_n = \dfrac{n}{(n-1)!}$.

c. La suite u est décroissante à partir de $n = 2$.

d. La suite u est convergente.

EXERCICE 12

On considère la fonction f définie sur $\mathrm{I} =]-\infty~;~3[$ par $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$.
Soit u la suite définie par $u_0 = 1,5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

a. f est croissante.

b. u est croissante.

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 < u_n < 2$.

d. Si u est convergente et si ℓ est sa limite, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

EXERCICE 13

On considère la suite u définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2}\left(u_n\right)^2$. On admettra que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. On considère alors la suite v définie par $v_n = \ln\left(\sqrt{2}\right) u_n$.

a. La suite v est géométrique.

b. $v_{10} = -512 \times \ln 2$.

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = (\ln 2)\left(1 - 2^n\right)$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n = \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

EXERCICE 14

On dispose de quatre urnes numérotées de 1 à 4. Les urnes sont composées ainsi :

— Urne U_1 : 1 boule bleue et 3 boules rouges ;
— Urne U_2 : 2 boules bleues et 4 boules rouges ;
— Urne U_3 : 3 boules bleues et 5 boules rouges ;
— Urne U_4 : 6 boules rouges.

Un joueur choisit une urne au hasard, puis prélève une boule au hasard de cette urne. Le joueur est gagnant s'il tire une boule bleue ; il est perdant sinon. On désigne par :

- Ω l'univers des possibilités et P la probabilité associée ;
- P_A la probabilité conditionnée par un évènement A de Ω ;
- G l'évènement : « le joueur gagne » ;
- U_n l'évènement : « le joueur choisit l'urne U_n ».

a. $P_{U_1}(G) = \dfrac{2}{3} P_{U_3}(G)$.

b. $P(G) = \dfrac{9}{8}$.

c. $P\left(U_1\right) = \dfrac{1}{6}$.

d. $P_{U_2}(G) = P_G\left(U_2\right)$.

EXERCICE 15

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; 2 ; 3), B(?1 ; 4 ; 3), C(−2 ; 1 ; 3) et D(5 ; 4 ; −3).
On appelle K le barycentre de {(C, 1) ; (D, ?2)} et J le milieu de [BC]. On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

a. Dans le triangle ABC, les médianes se coupent au point de coordonnées $(-2\,;\ 7\,;\ 9)$.

b. Les coordonnées de K sont $(-12\,;\ -7\,;\ 9)$.

c. Une équation paramétrique du segment [KJ] est $\left\{\begin{array}{l c r} x & = & 12-9t\\ y & = & 7-3t\\ z & = & -9+8t \end{array}\right.$, où $t \in \left[0\,;\ \dfrac{3}{2}\right]$.

d. Une équation du plan perpendiculaire à (KJ) passant par A est
$9x+3y-8z+9=0$.

EXERCICE 16

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère le plan P d'équation $\left\{\begin{array}{l c r} y & = & 2x-1\\ z & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$ et la droite D d'équation $\left\{\begin{array}{l c r} y & = & 2x-1\\ z & = & 0 \end{array}\right.$.

Soient A$(1\,;\ 1\,;\ 1)$, B$(3\,;\ 5\,;\ -3)$ et C$(1\,;\ -4\,;\ 2)$.

a. A et B sont deux points de P.

b. D est perpendiculaire à P.

c. La distance de C à P est $\sqrt{5}$ (en unités de repère).

d. L'ensemble des points $M(x\,;\ y\,;\ z)$ tels que
$(x-1)(x-3)+(y-1)(y-5)+(z-1)(z+3)=0$ est la sphère de diamètre [AB].