∽ Concours Fesic 16 mai 2009 ∾

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+2}{5x}\right)$.
On appelle D l'ensemble de définition de f, D′ l'ensemble de définition de sa dérivée f' et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. Pour tout $x \in \mathrm{D}$, on a $f(x) = \ln(3x+2) - \ln x - \ln 5$

b. Pour tout $x \in \mathrm{D}'$, on a $f'(x) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5x}{3x+2}$.

c. $\mathrm{D}' = \mathbb{R} - \left\{0\ ;\ -\dfrac{2}{3}\right\}$.

d. On a $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$.

EXERCICE 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, P un polynôme de degré n et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = P(x) \times \mathrm{e}^{2x-1}.$$

a. Il existe un polynôme Q de même degré que P (degré n) tel que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = Q(x) \times \mathrm{e}^{2x-1}$.

b. Quels que soient le polynôme P et son degré, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

c. L'inéquation $\mathrm{e}^{2x-1} \geqslant 3$ n'a pas de solution.

d. On suppose ici que P est le polynôme défini par $P(x) = x^2 + 1$. On suppose que a, b et c sont trois réels tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
$F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{2x-1}$ soit une primitive de f.
Alors on a le système $\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ 2a+b & = & 0 \\ b+c & = & 1 \end{array}\right.$

EXERCICE 3

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1} + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x(1-x) + 1.$$

On admet que l'équation $g(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ et on appelle α cette solution.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère du plan.

a. La droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

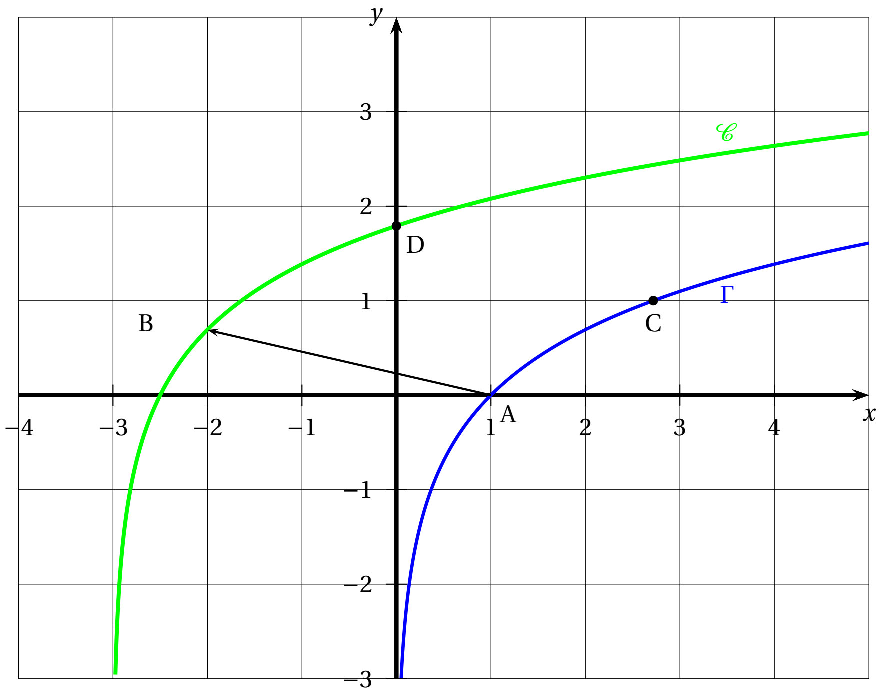
b. g est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe opposé à $g(x)$.

d. On a $f(\alpha) = \alpha + 1$.

EXERCICE 4

On considère le graphique ci-dessous réalisé dans un repère orthonormal.



$\mathscr{C}$ est la représentation d'une fonction f et Γ est celle de la fonction ln (logarithme népérien).
On sait que $\mathscr{C}$ est l'image de Γ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$, avec A$(1\,;0)$ et B$(-2\,;\,\ln 2)$.

a. f est la fonction définie par $f(x) = \ln 2x + 6)$.

b. La distance entre deux points M et N appartenant respectivement à Γ et à $\mathscr{C}$ et situés à la même ordonnée est constante.

c. La tangente à Γ en A est parallèle à la tangente à $\mathscr{C}$ en B.

d. La droite (CD) est parallèle à la droite (AB).

EXERCICE 5

a. Quel que soit $x_0 \in]1\,;\,+\infty[$, on a $[\ln(\ln(x))]'(x_0) = \dfrac{2\ln x_0}{x_0}$.

b. L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{2x} - 3e^x - 4 \geqslant 0$ est $[\ln 4\,;\,+\infty[$.

c. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. f est continue en 0.

d. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(t) = t\ln t$ pour $t > 0$ et $g(0) = 0$.
La courbe représentant g dans un repère du plan possède une demi-tangente au point d'abscisse 0.

EXERCICE 6

a. On considère la suite u, définie par : $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

On veut montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 1$. On tient pour cela le raisonnement par récurrence suivant :

« Soit $P(n)$ l'inéquation $[u_n > 1]$.

Initialisation : cas $n = 0$. $u_0 = 3 > 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(p)$ soit vraie. Montrons que $P(p+1)$ est vraie.

On a $u_p > 1$ d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $4u_p - 2 > 4 \times 1 - 2$, soit $4u_p - 2 > 2$.

De même $u_p + 1 > 1 + 1$, donc $u_p + 1 > 2$. On en déduit $\dfrac{4u_p + 2}{u_p + 1} > \dfrac{2}{2}$ et donc $u_{p+1} > 1$. Donc $P(p+1)$ est vraie.

Conclusion : De ces deux assertions et d'après le théorème de raisonnement par récurrence, on déduit que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. »

Ce raisonnement est exact.

b. On considère les fonctions f et g définies respectivement par :

$$x \in \left]-\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[,\ f(x) = \ln(2x+3) \text{ et } x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\hat{\mathrm{e}}^x - 3}{2}.$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentant respectivement f et g dans un repère orthonormal du plan et on appelle Δ la droite d'équation $y = x$.

On veut montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à Δ. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« Soient $x \in \left]-\dfrac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$, $y \in \mathbb{R}$, M le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et N le point de coordonnées $(y\ ;\ x)$.

Par définition, Δ est médiatrice de [MN]. Or $M \in \mathcal{C}_f$, donc $y = f(x) = \ln(2x+3)$. On en déduit $2x + 3 = \mathrm{e}^y$ et donc $x = \dfrac{\mathrm{e}^y - 3}{2}$. Il s'ensuit que le point N appartient à $\mathcal{C}_g$. Ceci étant vrai pour tout point M ainsi défini, c'est que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à Δ »

Ce raisonnement est exact.

c. On considère la suite u définie par : $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 8}{6}$. On veut montrer que u est croissante.

On tient pour cela le raisonnement suivant :

« Un raisonnement par récurrence prouve que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. Or la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{6}$ est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$. On en déduit que u est croissante. »

Ce raisonnement est exact.

d. On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$. On veut montrer que $P(x)$ est factorisable par $(x-1)^2$.

On tient pour cela le raisonnement suivant :

« On a $P(1) = 0$. Il existe donc un polynôme Q_1 tel que, pour tout x, $P(x) = (x-1)Q_1(x)$.

Pour tout x, on a : $P'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12$.

Mais aussi : $P'(x) = Q_1(x) + (x-1)Q(x)$.

Or $P'(1) = 0$. On a donc $Q_1(1) = 0$. Il existe donc un polynôme Q_2 tel que pour tout x, $Q_1(x) = (x-1)Q_2(x)$, soit aussi $P(x) = (x-1)^2 Q_2(x)$ ». Ce raisonnement est exact.

EXERCICE 7

Dans le plan complexe de centre O, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = \sqrt{3}(1 + \mathrm{i})$, $b = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(-1 + \mathrm{i})$.

a. OABC est un trapèze.
b. (OC) et (BC) sont perpendiculaires.
c. Le barycentre G du système $\{(\mathrm{A}, 2), (\mathrm{B}, -1), (\mathrm{C}, 3)\}$ a pour affixe $2a - b + 3c$.
d. OABC possède deux côtés de même longueur.

EXERCICE 8

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation [E] : $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$. Un nombre complexe z étant donné, on note $\overline{z}$ le complexe conjugué de z.

a. [E] possède au plus 4 solutions.
b. Si z_0 est une solution de [E], alors $-z_0$, $\overline{z_0}$ et $-\overline{z_0}$ sont d'autres solutions.
c. Les solutions de [E] ont toutes le même module.
d. Les solutions de [E] ont toutes le même argument (à 2π près).

EXERCICE 9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère le point A d'affixe $a = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, la rotation r de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

a. Le point A a les coordonnées polaires $\left(2\,;\,-\dfrac{\pi}{3}\right)$.
b. L'image de O par r est le point B de coordonnées cartésiennes $\left(\sqrt{3}\,;\,1\right)$.
c. Le point image de O par $r \circ t$ est le point A.
d. Si C est le point d'affixe c, alors le point d'affixe $\dfrac{1}{2}\mathrm{i}ac$ est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

EXERCICE 10

On considère la fonction φ définie par : $\varphi(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$. Soient deux réels a et b et la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_a^b \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$. En particulier, on a $f(0) = \displaystyle\int_a^b \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$. On appelle D l'ensemble de définition de f.

a. Si $a = 1$, alors f est définie quel que soit b.
b. Si $b = 1$, alors f est définie quel que soit a.
c. Si $a = 2$ et $b = 1$, alors f(0) représente l'aire (en unités d'aire) de la surface comprise entre les droites d'équation $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$ et la courbe représentant la fonction φ.
d. Dans cette question, on suppose $0 < a < b$. f est solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

EXERCICE 11

On considère les intégrales $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\,\mathrm{d}t$.

a. Quel que soit le réel t, $\cos^2 t - \sin^2 t = \sin(2t)$.

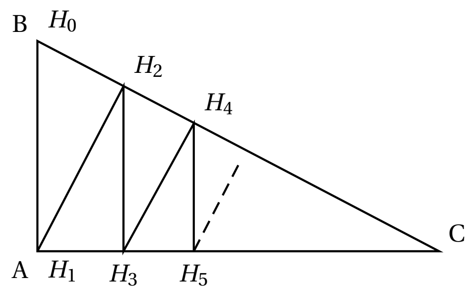
b. $\mathrm{I} - \mathrm{J} = -\dfrac{1}{2}$.

c. $\mathrm{I} + \mathrm{J} = \pi$.

d. L'aire représentée par I est la même que celle représentée par J.

EXERCICE 12

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et BC = 8. On définit la suite des points (H_n) ainsi : H_0 =B et H_{n+1} est le projeté orthogonal de H_n sur (AC) si n est pair et sur (BC) si n est impair. On définit les suites (ℓ_n) et (L_n) par :
$\ell_n = H_n H_{n+1}$ et $L_n = \ell_0 + \ell_1 + \cdots + \ell_n$.



a. $\ell_1 = H_1H_2 = 2$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, le triangle $H_n H_{n+1} H_{n+2}$ est un demi-triangle équilatéral.

c. La suite (ℓ_n) est géométrique.

d. Quand n tend vers $+\infty$, L_n tend vers un nombre fini inférieur à 30.

EXERCICE 13

Si f est une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on définit les dérivées successives de f :

- $f^{(0)} = f$ (lire : la dérivée d'ordre 0 de f est égale à f) ;
- $f^{(1)} = f'$ (dérivée 1^re^ de f) ;
- $f^{(2)} = f''$ (dérivée deuxième de f c'est-à-dire la dérivée de f') ;
- pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$ (la dérivée $(n+1)$-ième de f est la dérivée de la dérivée n-ième).

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x\mathrm{e}^x$. On considère la suite (u_n) définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $u_n(x) = \varphi^{(n)}(x)$ (dérivée n-ième de φ calculée en x).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentant la fonction u_n dans un repère du plan.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $u_n(x) = (x+n)\mathrm{e}^x$.

a. Dans cette question, x est un réel fixé. La suite (u_n) est une suite arithmétique.

a. Dans cette question, n est un entier naturel fixé.
La fonction u_n est décroissante sur $]-\infty\,;\,-n[$ et croissante sur $[-n\,;\,+\infty[$.

a. Dans cette question, n est un entier naturel fixé.
La courbe $\mathscr{C}_n$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_{n+1}$.

EXERCICE 14

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \times 3^{2k}$ vaut 1 milliard.

b. Pour un département donné, on peut faire plus de plaques minéralogiques de véhicules composées de 4 chiffres et 2 lettres que de plaques composées de 3 chiffres et 3 lettres. (On supposera que tous les chiffres et toutes les lettres de l'alphabet sont utilisables).

c. Un dé est pipé de sorte que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro de cette face. La probabilité d'apparition du 3 est $\dfrac{1}{7}$.

d. Un parking dispose de 10 places libres. Il y a $\binom{10}{3}$ possibilités de ranger 3 voitures dans ce parking.

EXERCICE 15

Un dé cubique équilibré possède 4 faces noires et 2 faces blanches. Un 2[e] dé équilibré ayant la forme d'un tétraèdre régulier possède 3 faces blanches et 1 face noire. On choisit un dé au hasard et on le lance.

a. La probabilité que la face cachée soit noire est $0,5$.

b. La probabilité que le dé choisi soit cubique sachant que la face cachée est blanche est $\frac{4}{13}$.

Une variable aléatoire X (en minutes) suit une loi de répartition uniforme sur $[10\,;\,30]$.

c. L'espérance associée à X est 10 min.

d. La probabilité d'avoir $X < 25$ sachant que l'on a $X > 15$ est $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 16

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

a. L'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ pour lesquels il existe $k \in [-1\,;\,1]$ vérifiant le système $\begin{cases} x &= 2k+1 \\ y &= -k+2 \\ z &= 3k-1 \end{cases}$ est le segment [AB], où on a A$(1\,;\,2\,;\,-1)$ et B$(5\,;\,0\,;\,5)$.

b. Le plan d'équation $2x-3y+z+1=0$ possède le vecteur $\vec{n}(-2\,;\,3\,;\,-1)$ pour vecteur normal.

c. La droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x &= 2k+1 \\ y &= -k+2 \\ z &= 3k-1 \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$, est perpendiculaire au plan d'équation $2x-3y+z+1=0$.

d. L'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant le système $\begin{cases} x &= 3 \\ y &= 2 \\ z &\in \mathbb{R} \end{cases}$ est une droite.