Concours d'entrée FESIC mai 2000

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x + 1 + \frac{1}{|x|+1}.$$

$\mathcal{D}$ son ensemble de définition et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Vrai/Faux On a : $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

Vrai/Faux La droite Δ d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x + 1$ est asymptote $\mathcal{C}$.

Vrai/Faux La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ.

Vrai/Faux Pour tout $x > -1$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{3}$.

---

2. Soit f la fonction dfinie par/ :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}.$$

Vrai/Faux La restriction de f à l'intervalle $[0\,;1[$ est une bijection de $[0\,;1[$ sur $]-1\,;\,+\infty[$.

Vrai/Faux La restriction de f à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ admet une réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]1\,;\,+\infty[$.

Vrai/Faux L'équation $1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x$ admet une unique solution.

Vrai/Faux Pour tout $a < 0$, l'équation $f(x) = a$ admet deux solutions distinctes.

---

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sin x$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et Δ la droite d'équation $y = x$.

Vrai/Faux La fonction f vérifie l'équation différentielle $y'' + y = 2\cos x$.

Vrai/Faux La courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ ont une infinité de points communs.

Vrai/Faux La droite Δ est tangente à $\mathcal{C}$ en chacun de leurs points communs.

Vrai/Faux La droite Δ' d'équation $y = -x$ est tangente à $\mathcal{C}$.

---

4. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln(\ln|x|)\,,$$

$\mathcal{D}$ son ensemble de définition et $\mathcal{C}$ sa courbe repésentative.

Vrai/Faux On a $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

Vrai/Faux Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{|x|\ln|x|}$.

Vrai/Faux Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e est $y = \dfrac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$.

Vrai/Faux Pour tous réels a et b vérifiant $b > a \geqslant \mathrm{e}$, on a :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

5. Pour n entier naturel, $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathrm{I} =]-1~;~+\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

et on désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n.

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, la courbe $\mathscr{C}_n$ passe par le point de coordonnées $(1~;~\ln 2)$.

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in [0~;~1]$, on a $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, on a $f_n'(x) = 0$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on désigne par a_n le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 1.

Vrai/Faux La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.

6. Pour tout réel m, on considère l'équation (E_m) suivante, d'inconnue réelle x :

$$\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} - m = 0.$$

Vrai/Faux L'unique valeur de m pour laquelle $x = 0$ est solution de l'équation (E_m) est $m = 0$.

Vrai/Faux Pour toute valeur de m, l'équation (E_m) admet au moins une solution.

Vrai/Faux Si $-1 < m < 0$, l'équation (E_m) a deux solutions positives.

Vrai/Faux Si $m > 0$, l'équation (E_m) a une unique solution.

7. On considère l'équation (E) suivante :

$$\sin x = \sqrt{3}\cos 2x.$$

Vrai/Faux L'équation (E) est équivalente à l'équation

$$\left(\mathrm{E}'\right) \qquad \sqrt{3}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{3} = 0.$$

Vrai/Faux L'équation (E) admet quatre solutions dans $\mathbb{R}$.

Vrai/Faux L'équation (E) admet deux solutions dans l'intervalle $[-\pi~;~\pi]$.

Vrai/Faux L'équation (E) admet deux solutions dans l'intervalle $[-\pi~;~0]$, dont le produit vaut $\dfrac{2\pi^2}{9}$.

8. Soit F la fonction dfinie sur $\mathrm{I} = [0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(On ne cherchera pas calculer directement F.)

Vrai/Faux La fonction F est positive et strictement croissante sur I.

Vrai/Faux Pour tout $t \geqslant 0$, on a : $\sqrt{t} \leqslant t + \dfrac{1}{4}$.

Vrai/Faux On a : $\displaystyle\int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{4} - \left(x + \frac{5}{4}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Vrai/Faux Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a/ : $F(x) \leqslant \dfrac{5}{4}$.

---

9. Pour, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(2t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Vrai/Faux Pour tout $x > 0$, on a : $F'(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x^2} - \ln 2$.

Vrai/Faux Pour tout $x \in \left]\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$, on a $F(x) < 0$.

Vrai/Faux Pour tout $x > 0$, on a : $F(x) = -\dfrac{\ln(2x)}{x} - \dfrac{1}{x} + \ln(2) + 1$.

Vrai/Faux On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ln(2) + 1$.

---

10. On pose : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 t\cos^2(\pi t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 t\sin^2(\pi t)\,\mathrm{d}t$.

Vrai/Faux On a : $\mathrm{I} > 0$ et $\mathrm{J} > 0$.

Vrai/Faux On a $\mathrm{I} + \mathrm{J} = 1$.

Vrai/Faux On a : $\mathrm{I} - \mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 t\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t$.

Vrai/Faux On a : $\mathrm{I} = \mathrm{J} = \dfrac{1}{2}$.

---

11. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par leur premier terme $a_0 = 2$, $b_0 = 4$, respectivement et les relations, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n).$$

On désigne par A_n et B_n les points de l'axe orienté d'abscisse a_n et b_n respectivement.

Vrai/Faux La suite $u_n = a_n + b_n$ est constante.

Vrai/Faux La suite $v_n = a_n - b_n$ est une suite géométrique convergente.

Vrai/Faux Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les segments $[A_nB_n]$ ont le même milieu I, qui est le point de $(\mathrm{O}x)$ d'abscisse 3.

Vrai/Faux Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = 3 - \dfrac{1}{2^n}$ et $b_n = 3 + \dfrac{1}{2^n}$.

---

12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_1 = 2$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \ln(u_n)$.

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = \dfrac{2}{3^n}$.

Vrai/Faux La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est arithmétique, de raison $-\ln(3)$.

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 3\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{n}\left(v_1 + v_2 + \cdots + v_n\right) = \ln(2) - \frac{n}{2}\ln(3).$$

---

13. Pour tout réel $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$, on pose $Z(\theta) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

On a :

Vrai/Faux $Z\left(\frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Vrai/Faux pour tout $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$, $\overline{Z(\theta)} = Z(-\theta)$.

Vrai/Faux pour tout $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$, $Z(\theta) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

Vrai/Faux pour tout $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$, $\arg[Z(\theta)] = \dfrac{\theta}{2} \quad [2\pi]$.

---

14. Soit (E) l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^2 - 4\overline{z} - 5 = 0.$$

Vrai/Faux Si z_0 est solution de (E), alors $\overline{z_0}$ est aussi solution.

Vrai/Faux L'équation (E) admet une solution imaginaire pure.

Vrai/Faux L'équation (E) admet deux solutions réelles.

Vrai/Faux L'équation (E) admet exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$.

---

15. Soit $a \in \left]\frac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ \mathrm{e}\right[$ et (E) l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^2 - 2z\ln(a) + 1 = 0.$$

On désigne par M et N les points du plan dont les affixes sont les racines de (E).

Vrai/Faux Les points M et N sont symétriques par rapport l'axe réel (Ox).

Vrai/Faux Les points M et N sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 1.

Vrai/Faux Il n'existe aucune valeur de a telle que M et N soient symétriques par rapport à l'origine.

Soit A le point du plan de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$.

Vrai/Faux On a : A$M < 2$.

---

16. Pour n entier naturel non nul, on note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe paramètre par :

$$\begin{cases} x(t) & = & \sin(t) \\ y(t) & = & \cos(nt) \end{cases},$$

autrement dit, l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(\sin(t),\ \cos(nt))$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Vrai/Faux La courbe $(\mathscr{C}_1)$ est un cercle.

Vrai/Faux La courbe $(\mathscr{C}_2)$ est la parabole d'équation $y = 1 - 2x^2$.

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, l'axe $(\mathrm{O}y)$ est axe de symétrie pour $(\mathscr{C}_n)$.

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, $(\mathscr{C}_n)$ admet au point M(0) une tangente parallèle l'axe $(\mathrm{O}y)$.

---

17. Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant, quatre inconnues $a,\ b,\ c,\ d$:

$$S_m \begin{cases} a + \ b - \ c + \ 2d & = & 2 \\ 2a + 4b - 6c + \ 2d & = & 0 \\ -a + b - 3c - \ 9d & = & -1 \\ a - 2b + 5c + 13d & = & m + 2 \end{cases}$$

Vrai/Faux Pour $m \neq -2$, le système S_m admet un unique quadruplet solution.

Vrai/Faux Pour $m = -2$, le système S_{-2} admet une infinité de quadruplets solution, qui sont de la forme : $(7 - k\ ;\ 2k - 3\ ;\ k\ ;\ -1)$ où $k \in \mathbb{R}$.

Vrai/Faux Dans l'espace, l'ensemble des points de coordonnées :

$\begin{cases} x & = & -k + 7 \\ y & = & 2k - 3 \\ z & = & k \end{cases}$ où k décrit $\mathbb{R}$, est un plan.

Vrai/Faux Dans l'espace, l'ensemble des points de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ telles que $x = 7 - z$ est une droite.

---

18. Dans le plan, on considère un triangle (ABC) et on note :

G le barycentre du système {(A, 3), (B, 1), (C, 1)} ;

Q le barycentre du système {(A, 3), (C, 1)} ;

R le barycentre du système {(A, 3), (B, 1)} ;

P le milieu du segment [BC] ;

Vrai/Faux Les droites (CR) et (BQ) sont sécantes en G.

Vrai/Faux Le point G appartient la droite AP.

Vrai/Faux Le point G est l'image du point A par l'homothétie de centre P et de rapport $\dfrac{1}{5}$.

On suppose que les points B et C sont fixes et que le point A décrit l'ensemble $\mathscr{E}$ des points du plan tels que : $\left(\overrightarrow{M\mathrm{B}},\ \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Vrai/Faux L'ensemble $\mathscr{E}'$ décrit par G lorsque A décrit $\mathscr{E}$ est une droite parallèle (BC).

---

19. Un auto-radio est muni d'un code de sécurité constitué de 4 chiffres : chacun de ces chiffres est compris entre 0 et 9 ; seul le premier ne peut pas être nul. Lorsque le poste a été enlevé de son emplacement dans l'automobile il faut, pour le réinstaller, composer le code de sécurité. Lorsque le premier code composé est inexact, il faut attendre deux minutes pour pouvoir composer un nouveau code. Si celui-ci est inexact, il faut nouveau attendre quatre minutes pour composer le code suivant et ainsi de suite, le temps d'attente tant multiplié par deux chaque fois.

On admet que l'on peut renouveler l'opération autant de fois que l'on veut et on néglige chaque fois le temps mis pour composer le code.

Vrai/Faux En 24 heures, on a le temps de faire au maximum 10 essais.

On suppose que l'on compose les codes au hasard, sans répétition, jusqu'à obtention du code correct.

Vrai/Faux La probabilité pour que le code ne soit exact qu'au quatrième essai est $\dfrac{1}{8\,997}$.

Vrai/Faux La probabilité pour que le code correct soit trouvé en moins de 24 heures est $\dfrac{1}{900}$.

Vrai/Faux La probabilité pour que le code correct soit trouvé au cours du deuxième jour est $\dfrac{1}{8\,990}$.

---

20. On lance un dé dont les six faces, numérotées de 1 à 6 , sont équiprobables.

Si le résultat est un nombre pair, on tire au hasard une boule d'une urne U contenant deux boules blanches et trois boules noires. Si le résultat est impair, on tire au hasard une boule d'une urne V qui contient trois boules blanches et deux boules noires.

On désigne par :

B l'évènement « tirer une boule blanche » ;

N l'évènement « tirer une boule noire » ;

U l'évènement « tirer une boule dans l'urne ».

On a :

Vrai/Faux $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{U}) = p\left(\mathrm{N} \cap \overline{\mathrm{U}}\right)$.

Vrai/Faux $p(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2}$.

Vrai/Faux $p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{N})$.

Vrai/Faux $p(\mathrm{U}/\mathrm{B}) = p\left(\overline{\mathrm{U}}/\mathrm{N}\right)$.
