Concours FESIC mai 1998
Durée : 2 h

Dans toute question où il intervient le plan (respectivement l'espace) est rapporté à un un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right) = (Oxy)$ (respectivement pour l'espace $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right) = (Oxyz)$).

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie par eX -1

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

et C sa courbe représentative.

a) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}*$.

b) La fonction f est impaire.

c) Les droites Δ_1 d'équation $y = x - 1$ et Δ_2 d'équation $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe C.

d) C est au-dessus de Δ_1.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2$$

D son domaine de définition et C sa courbe représentative.

a) On peut prolonger la fonction f par continuité en 0 en posant $f(0) = 2$.

b) La droite Δ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à C.

c) La fonction g définie par

$$g(x) = (1 - x)e^x - 1$$

est négative ou nulle sur $\mathbb{R}$.

d) La fonction f est décroissante sur D.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{|x-3|}\right)$$

D son domaine de définition et C sa courbe représentative.

a) On a : $D =]3 ; +\infty[$.

b) La fonction f est positive sur D.

c) Pour tout $x \in D$, on a :

$$f'(x) = \frac{-4}{(x+1)|x-3|}$$

d) C admet pour tangente au point d'abscisse 2 la droite Δ d'équation $y = \frac{4}{3}(x - 2) + \ln 3$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x-1}$$

D son domaine de définition et C sa courbe représentative.

a) On a : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

b) La courbe représentative C' de la fonction $x \longmapsto f(x+1)$ admet le point 0 pour centre de symétrie.

c) La fonction f admet un maximum au point d'abscisse $1 + \mathrm{e}$.

d) Pour $a \in]0\,;\ 1/\mathrm{e}[$, l'équation $f(x) = a$ admet exactement 2 solutions dans D.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par

$$\left\{\begin{array}{l c l} f(x) & = & \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

et C sa courbe représentative.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) \leqslant x$.

b) La fonction f est continue en 0.

c) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

d) La droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à C.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$$

et C sa courbe représentative.

a) Pour tout x réel, on a : $f(\pi - x) + f(x) = 0$.

b) La courbe C admet le point I de coordonnées $(\pi/2\,;\ 0)$ pour centre de symétrie.

c) Pour tout x réel, on a : $|f(x)| \leqslant 1$.

d) La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sqrt{2+\sin x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 7

Soit f et F les fonctions définies respectivement par

$$f(t) = \frac{1}{t\ln t} \quad \text{et} \quad F(x) = \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) La fonction F est définie sur $]0\,;\ +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a :

$$F(x) = \ln(|\ln x|) - \ln(|\ln 2|)$$

b) La fonction F est décroissante sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$.

c) Pour tout $x > 2$, on a :

$$F'(x) = \frac{1}{x\ln x} - \frac{1}{2\ln 2}.$$

d) On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 1$.

Exercice 8

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}.$$

et on note C la courbe représentative de la fonction F.

a) C admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

b) Pour tout $x \in]0\ ;\ 1]$, on a :

$$F(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^x - 1}\right).$$

c) On peut prolonger F par continuité en 0.

d) La fonction F est négative et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

Exercice 9

Soit l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = 0 \quad (E).$$

a) Pour tous a et b réels, la fonction

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

b) Les fonctions solutions de (E) ont pour période $\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

Soit g la solution de (E) qui vérifie $g(0) = 0$ et $g\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 1$.

c) La fonction g n'a pas de limite en $+\infty$.

d) Pour tout x réel on a :

$$g(x) = \left[\exp\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{x}{2}\right)\right]\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Exercice 10

Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

a) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est décroissante.

b) Pour tout $n\imath, \mathbb{N}*$, on a : $I_n + I_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n}$.

c) On a : $I_1 = \ln(\mathrm{e}+1) - \ln 2$.

d) On a : $I_2 = \mathrm{e} - 1 - \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$.

EXERCICE 11

Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

a) On a : $I_1 = 2 - \mathrm{e}$.

b) Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

c) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est géométrique.

d) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est bornée.

EXERCICE 12

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par la relation

$$v_0 \times v_1 \times v_{\times} \ldots \times v_n = \frac{1}{3^{n^2+n}}.$$

a) On a : $v_3 = \dfrac{1}{3^{12}}$.

b) Pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 3^2 v_n$.

c) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

d) On a :

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_{10} = \frac{1}{110 \ln 3}.$$

EXERCICE 13

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie par $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2 - \dfrac{2}{u_n}$ pour tout entier naturel n, et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = \frac{u_n - (1-\mathrm{i})}{u_n - (1+i)}.$$

a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1+\mathrm{i}$.

c) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.

d) Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = 0.$$

EXERCICE 14

On considère la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$ pour $x \geqslant 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in [0~;~1]$ donné et la relation de récurrence $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ pour tout entier naturel n. Enfin, soit α un réel appartenant à $[0 ; 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

a) Le réel $-1/2$ est solution de l'équation $x = \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$.

b) Pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

c) Pour tout réel $x \in [0~;~1]$, on a : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

d) Pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{\left(2\sqrt{2}\right)^n}.$$

EXERCICE 15

Soit F l'application du plan P dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$, où $f(z) = \dfrac{2z}{1+z\overline{z}}$

a) Pour tout z complexe, on a : $f\left(\overline{z}\right) = \overline{f(z)}$.

b) Si z est un complexe non nul, on a :

$$f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) \iff z \in \mathbb{R}^*.$$

c) L'ensemble des points invariants par F est le cercle trigonométrique (cercle de centre O et de rayon 1).

d) Pour tout point M du plan, les points O, M et $M' = F(M)$ sont alignés.

EXERCICE 16

Pour tout nombre complexe z, on pose

$$f(z) = z^3 - 2\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)z^2 + 4\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z - 8\mathrm{i}.$$

a) On a pour tout z complexe :

$$f(z) = (z-2\mathrm{i})\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right).$$

b) L'équation $f(z) = 0$ admet trois solutions, dont une imaginaire pure et deux complexes conjuguées.

c) Le nombre complexe $z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ est solution de l'équation $f(z) = 0$.

On note M_0, M_1 et M_2 les points du plan dont les affixes sont solution de l'équation $f(z) = 0$.

d) Les points M_0, M_1 et M_2 sont sur un même cercle de centre O.

EXERCICE 17

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires de l'espace, I le milieu de [A, B] et J le milieu de [C, D]. Soit m un réel et $S(m)$ le système de points pondérés

$$[(\mathrm{A}, 1)\,;\,(\mathrm{B}, 1)\,;\,(\mathrm{C}, m-2)\,;\,(\mathrm{D}, m)]$$

.

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des réels m pour lesquels le système $S(m)$ admet un barycentre, qu'on note alors C_m.

a) L'ensemble $\mathscr{E}$ est égal à $\mathbb{R}$ privé des réels 0 et 2.

b) Le point G_2 est le milieu du segment [I, D].

c) Pour tout $m \in \mathscr{E}$, C_m est le barycentre du système $[(\mathrm{I}, 2)\,;\,(\mathrm{J}, 2m-2)]$.

d) Pour tout $m \in \mathscr{E}$, le milieu du segment $[G_m, G_{-m}]$ est le point J.

EXERCICE 18

Soit, dans l'espace, le plan P d'équation $3x-2y+5z-7=0$, A le point de coordonnées $(6\,;\,-5\,;\,11)$ et H son projeté orthogonal sur le plan P. Soit enfin $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;\,-2\,;\,5)$.

a) On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(2; 2; 1)$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(0\,;\,-1\,;\,1)$. Alors le triplet $\left(\mathrm{H}\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ est un repère du plan P.

b) On a : $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \wedge \overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}$.

c) La distance de A au plan P est $\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}} \wedge \overrightarrow{n}\right|$.

d) Les coordonnées du point H sont $(0\,;\,-1\,;\,1)$.

EXERCICE 19

Deux personnes A et B écrivent chacune au hasard un nombre à deux chiffres. Soit m le nombre écrit par A et n celui écrit par B; tous les couples (m, n), avec $10 \leqslant m \leqslant 99$ et $10 \leqslant n \leqslant 99$ sont supposés équiprobables.

a) La probabilité pour que A et B écrivent le même nombre est $\dfrac{1}{81}$.

b) La probabilité d'obtenir un couple (m, n) tel que $10 \leqslant m < 50$ et $10 \leqslant n < 50$ est $\dfrac{8}{9}$.

c) La probabilité d'obtenir un couple (m, n) tel que m soit un entier pair et n un entier impair est $\dfrac{1}{2}$.

d) La probabilité d'obtenir un couple (m, n) tel que $m < n$ est $\dfrac{89}{180}$.

EXERCICE 20

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. n personnes jouent à un jeu où il peut y avoir un nombre quelconque de gagnants.
La probabilité pour que le joueur A gagne est $p(A) = 1/3$; la probabilité pour que le joueur B gagne sachant que A a gagné est égale à $1/4$. On sait enfin que la probabilité pour que B gagne sachant que A a perdu est égale à $4/9$.

a) La probabilité pour que B gagne est égale à $5/12$.

b) La probabilité pour que A et B gagnent est égale à $7/12$.

c) Les évènements « A gagne » et « B gagne » sont indépendants.

d) La probabilité que A gagne sachant que B a gagné est égale à $9/41$.