Concours Fesic – mai 1997
Durée : 2 h 30

L'usage de la calculatrice est interdit pour cette épreuve, ainsi que tout document ou formulaire.
L'épreuve comporte 20 *exercices indépendants. Vous ne devez en traiter que* 15 *maximum. Si vous en traitez davantage, seuls les* 15 *premiers seront corrigés.*
Un exercice comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c, d. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).
Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponse).
Toute réponse exacte rapporte un point.
Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.
L'annulation d'une réponse ou l'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.
Une bonification de deux points est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).
Lattention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.
Dans toute question où il intervient, le plan (respectivement l'espace) est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right) = (Oxy)$ *(respectivement pour l'espace* $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right) = (Oxyz)$*).*

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

a. La fonction f est paire.

b. Pour tout réel x tel que $x \neq 0$ et $x \neq 1$ on a : $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + f(x) = 0$.

c. La courbe $\mathscr{C}$ admet le point I de coordonnées $(1 ; 1)$ pour centre de symétrie.

d. Pour tout réel x tel que $x > 1$, on a : $f \circ f(x) = x$.

EXERCICE 2

Soit E l'ensemble des fonctions f vérifiant les conditions suivantes :
(i) il existe trois réels (a, b, c) tels que $c \neq 0$ et, pour tout réel $x \neq -c$, on a :

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$$

(ii) la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f passe par le point A de coordonnées $(0 ; -1)$;
(iii) $\mathscr{C}_f$ admet au point A une tangente de coefficient directeur -2.

a. La fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

appartient à E.

b. Si $f(x) = ax + b$ est une fonction appartenant à E, on a les relations x+c suivantes entre a, b et c :

$$\begin{cases} a - 1 & = & 2b \\ c & = & -b. \end{cases}$$

c. L'ensemble E contient une infinité de fonctions.
d. Si f appartient à E sa courbe $\mathscr{C}_f$ n'admet pas de tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right),$$

D son domaine de définition et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

a. On a $D =]1~;~+\infty[$.
b. $\mathscr{C}$ admet une unique tangente horizontale.
c.La fonction f est croissante sur $]1~;~+\infty[$.
d. La droite Δ d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^x},$$

D son ensemble de définition et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

a. On a $D = \left]\frac{1}{\mathrm{e}}~;~+\infty\right[$.
b. On a, pour tout x appartenant à D :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right).$$

c. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
d. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x - 2$$

et C sa courbe représentative.

a. La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et, pour tout x de cet intervalle, on a :

$$f'(x) = (\ln x)^2.$$

b. La droite Δ d'équation $x = 0$ est asymptote à C.
c. La fonction f admet un extremum en 1.
d. Pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = \int_1^x (\ln t)^2\,\mathrm{d}t.$$

EXERCICE 6

a. On a $(32)^{1,2} = 64$.
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5^x \quad \text{et} \quad g(x) = (0,2)^x.$$

b. Pour tout x réel, on a $f'(x) = (\ln 5) f(x)$.
c. On a :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\ln 5}.$$

d. Pour tout x réel, on a $g(x) = f(-x)$.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$ et C sa courbe représentative.

a. Pour tout réel m, l'équation $f(x) = m$ admet au moins une solution.
b. La courbe C admet exactement deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.
c. L'équation $x^2 = \mathrm{e}^{2x}$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.
d. La fonction F définie par

$$F(x) = \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 8

Soit f, g et h les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ respectivement par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x,\ g(x) = \mathrm{e}^{-x},\ h(x) = -\mathrm{e}^{-x}.$$

On note respectivement $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ leurs courbes représentatives.

a. La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,2\pi]$ et, pour tout x de $[0\,;\,2\pi]$, on a :

$$f'(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x} cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

b. La droite Δ d'équation $y = x$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 0.
c. La courbe $\mathscr{C}_f$ est située entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
d. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un unique point commun et en ce point elles admettent la même tangente, et il en est de même des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$.

EXERCICE 9

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

a. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a :

$$F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - 1.$$

b. La fonction F est positive sur $\mathbb{R}$.
c. Pour tout réel $x \geqslant 1$, on a :

$$F(x) - F(1) \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

d. Pour tout réel x, on a : $F(x) = F(-x)$.

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}$$

et, pour n entier naturel, soit : $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
b. La suite (I_n) est croissante.
c. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_n - \int_0^n \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}\,\mathrm{d}x = n+1.$$

d. La suite (I_n) tend vers $+\infty$.

EXERCICE 11

Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par :

$$I_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t + 1}\,\mathrm{d}t.$$

a. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $I_n \geqslant 0$.
b. Pour tout $n \geqslant 1$, on a : $I_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.
c. La suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
d. Pour tout $n \geqslant 1$, on a : $I_1 + I_2 + \ldots + I_n = \ln(n+2)$.

EXERCICE 12

Soit (u_n) une suite arithmétique vérifiant $u_4 = 0$ et $u_6 = -1$.

a. On a $u_5 = -\dfrac{1}{2}$.
b. Pour tout entier naturel n, on a $u_n = \dfrac{4-n}{2}$.
c. Pour tout entier $n \geqslant 9$, on a :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} \leqslant 0.$$

d. La suite (v_n) définie, pour n entier naturel non nul, par :

$$v_n = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{u_n}$$

est convergente.

EXERCICE 13

On considère la fonction définie par $f(x) = x\ln x$ pour $x > 0$ et la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 > \mathrm{e}$ donné et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n :

a. Pour tout x de l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) \geqslant 2$.
b. Pour tout entier naturel n, on a : $u_n > \mathrm{e}$.
c. La suite (u_n) est croissante.
d. Pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - e| \geqslant 2\,|u_n - \mathrm{e}|.$$

EXERCICE 14

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1.$$

a. La suite $\left(f_n(1)\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique.
b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
c. Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution.
On note α_n l'unique solution positive de l'équation $f_n(x) = 0$.
d. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 < \alpha_n < \dfrac{1}{n}$.

EXERCICE 15

a. Soit j le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On a :

$$\mathrm{j}^{1996} + \mathrm{j}^{1997} + \mathrm{j}^{1998} = 1.$$

b. Si un argument du nombre complexe non nul z est α, alors un argument de $-\dfrac{4}{z}$ est $-\alpha$.
c. Soit z un nombre complexe non nul. Si $\dfrac{z}{\overline{z}}$ est un réel positif, alors z est réel.
d. Soit z un nombre complexe. Si $|z| = 1$, alors il existe un entier naturel non nul n tel que $z^n = 1$.

EXERCICE 16

Soit les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

On note A le point du plan d'affixe z_1, et B le point d'affixe z_2.

a. Un argument de z_1 est $-\dfrac{\pi}{3}$
b. Il existe une rotation R de centre O transformant A en B.
c. On a $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.
d. L'ensemble E des points M d'affixe z tels que

$$z_2 z + \overline{z_2 z} + 1 = 0$$

est la droite d'équation $x + y = -\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 17

Soit (z_n) la suite complexe définie par son premier terme $z_0 = 8$ et la relation de récurrence, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = \left(\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\right) z_n$$

On note (M_n) la suite de points du plan complexe d'affixes z_n respectivement.

a. Le nombre z_3 est un réel positif.

b. Pour tout entier naturel n, on a : z -z

$$\frac{z_{n+} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

c. Pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{O}M_nM_{n+1}$ est rectangle en M_n.
d. Pour tout entier naturel n, on a : $M_nM_{n+1} = \sqrt{3}\mathrm{O}M_{n+1}$.

Exercice 18

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB $= a > 0$ et AC $= 2a$.
On note G le barycentre du système de points (A, 1), (B, -1), (C, 1) et on note H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

a. On a : AH $= \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
b. Le quadrilatère CGBA est un parallélogramme.
c. On a $\overrightarrow{\mathrm{BA}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2a^2$.
d. L'ensemble des points M du plan vérifiant $\mathrm{MB}^2 - \mathrm{MC}^2 = 2a^2$ est une droite perpendiculaire à (BC).

Exercice 19

Dans l'espace, on considère les points de coordonnées A(2 ; 0 ; 0), B(0 ; 4 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3) et, pour tout réel a, le système de points pondérés $\{(4-a)(1-a)(a)\}$.

$$S(\alpha) : \left\{\left(\mathrm{A},\ \frac{4-\alpha}{6}\right) ; \left(\mathrm{B},\ \frac{1-\alpha}{3}\right) ; \left(\mathrm{C},\ \frac{\alpha}{2}\right)\right\}.$$

a. Une équation du plan (ABC) est

$$x + \frac{y}{2} + \frac{2}{3}z - 2 = 0.$$

b. Le centre de gravité du triangle ABC est barycentre d'un système $S(\alpha)$. **c.** Pour tout réel α, le système $S(\alpha)$ admet un barycentre.
d. L'ensemble des barycentres des systèmes $S(\alpha)$, lorsque α décrit $\mathbb{R}$, est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{\imath} - 8\overrightarrow{\jmath} + 9\overrightarrow{k}$.

Exercice 20

L'ensemble E $= \{a, b, c, d, e\}$ est un univers sur lequel on définit une probabilité p.

a. Si $p(\{a, b, c\}) = \dfrac{3}{5}$ et $p(\{a, d, e\}) = \dfrac{9}{20}$ alors $p(\{a, e\}) \geqslant \dfrac{1}{20}$.
On suppose, pour les questions **b.** et **c.**, que A et B sont deux évènements de E tels que
$p(A) = \dfrac{2}{3}$, $p(B) = \dfrac{3}{5}$ et $p\left(A \cap \overline{B}\right) = \dfrac{4}{15}$
où $\overline{B}$ désigne l'évènement contraire de B.
b. On a $p(A \cup B) = \dfrac{13}{15}$.
c. Les évènements A et B sont indépendants.

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher, portant les lettres a, b, c, d, e respectivement. On effectue 5 tirages successifs d'une boule avec remise. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

d. La probabilité de tirer exactement 2 fois une voyelle est $q = \dfrac{2^2 \times 3^3}{5^5}$.