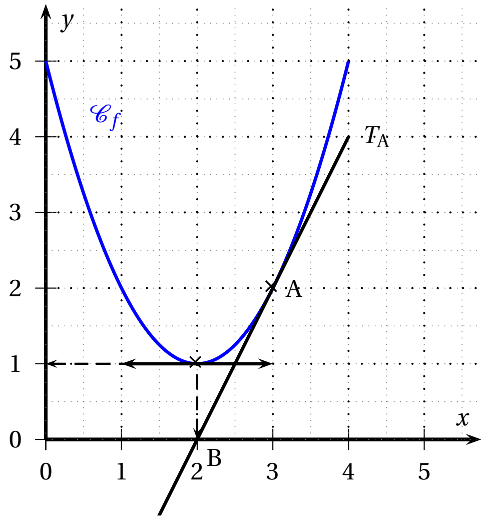
Concours Fesic–Puissance 11 – 14 mai 2016

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h ; répondre par Vrai ou Faux sans justification.
+1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1 **LECTURE-INTERPRÉTATION ÉNONCÉ**

Soit f une fonction définie, dérivable et ne s'annulant pas sur l'intervalle $I = [0 ; 4]$. On pose $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et g la fonction définie sur $[0 ; 4]$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
La tangente T_A au point A(3 ; 2) passe par le point B(2 ; 0).



a. $f'(2) = 1$.
b. $f'(3) = f(3)$.
c. Une équation de T_A est $y = 2x + 2$.
d. $g'(3) = \dfrac{1}{2}$.

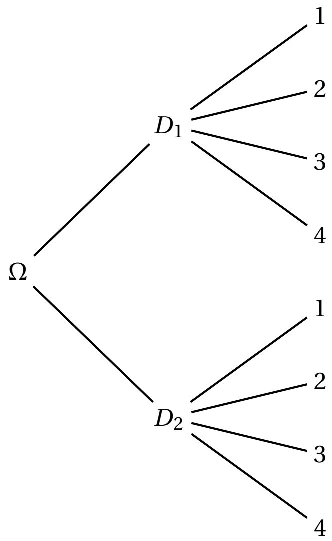
EXERCICE 2 **LOGIQUE**

Soit x un réel donné.
a. Si $\sqrt{x} = 2$ alors $|x| = 4$.
b. La réciproque du a. est toujours vraie.
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I = [-3 ; 7]$.
c. Si,pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ et $f(-3) = 1$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) > 0$.
d. Si une suite est croissante et admet une limite finie alors e11e est nécessairement bornée.

EXERCICE 3 **PROBABILITÉS CONDITIONNELLES**

On joue avec deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
Le premier dé, D_1, est un dé « honnête » c'est-à-dire pour lequel la sortie de chacune des faces est équiprobable.
Le deuxième dé, D_2, est truqué de façon que :
- la face numérotée 1 et la face numérotée 4 ont une chance sur douze de sortir ;
- la face numérotée 3 a une chance sur quatre de sortir.

a. On lance le dé n^o 2 , la probabilité de l'évènement « on a obtenu la face numérotée 2 » est égale à $\dfrac{7}{12}$.
Dans toute la suite, on lance un dé pris au hasard.
b. La probabilité d'obtenir l'évènement « on a obtenu la face numérotée 1 » est égale à $\dfrac{1}{9}$.
c. Les évènements « on a obtenu un numéro pair » et « on a utilisé le dé D_1 » sont indépendants.
d. Sachant qu'on a obtenu la face numérotée 1, la probabilité qu'on ait utilisé le dé D_1 est égale à $\dfrac{3}{4}$.



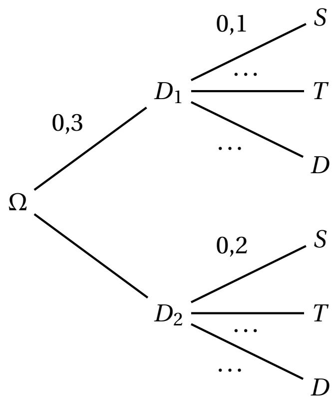
EXERCICE 4 **LIEN ENTRE TABLEAU ET ARBRE DE PROBABILITÉS**

Dans un lycée, les 200 élèves de Terminale se répartissent suivant les 3 activités : sport (S), théâtre (T) et dessin (D).
On donne les informations suivantes :

- 20 garçons choisissent le théâtre et 34 garçons choisissent le dessin.
- 28 filles choisissent le sport et 72 filles choisissent le dessin.
- Le nombre total de garçons représente 30 % de J'effectif total.
- Le sport est choisi par 10 % des garçons et par 20 % des filles.
- On pose x le nombre total de filles.

On note G l'évènement « l'élève est un garçon », F l'évènement « l'élève est une fille », S l'évènement « l'élève fait du sport », T l'évènement « l'élève fait du théâtre » et D l'événement « l'élève fait du dessin ».
On rassemble les informations précédentes dans le tableau et l'arbre ci-dessous.

	Garçons (G)	Filles (F)	Total
Sport (S)		28	
Théâtre (T)	20		
Dessin (D)	34	72	
Total		x	200



a. La probabilité qu'un garçon fasse du sport est égale à $0,1$.
b. $x = 160$.
c. La probabilité qu'un élève fasse du théâtre est égale à $0,3$.
d. $P_T(F) = \dfrac{2}{5}$.

EXERCICE 5 **CALCUL DU NOMBRE D'ABONNÉS D'UNE SOCIÉTÉ**

Le service commercial d'une société possédant plusieurs salles de sport dans une grande ville a constaté que l'évolution du nombre d'abonnés était définie de la manière suivante :
• chaque année, la société accueille 400 nouveaux abonnés ;
• chaque année, 40 % des abonnements de l'année précédente ne sont pas renouvelés.

En 2010 cette société comptait 1 500 abonnés.
La suite (a_n) modélise le nombre d'abonnés pour l'année $2010+n$.
On définit la suite (v_n) par $v_n = a_n - 1000$.

a. $a_1 = 1300$.
b. $a_{n+1} = 0,6 \times a_n + 400$.
c. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,4$.
d. $a" = 500 \times 0,6^{n-1} + 1000$.

EXERCICE 6 **CALCULS DE LIMITES**

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 - 4x + 7 = -\infty$.
b. Si, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) - 3 \leqslant 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
c. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^n + 3}{3^n + 2} = \dfrac{3}{2}$.
d. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{2n + (-1)^n} = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 7 **NOTIONS DE BASE SUR LES COMPLEXES**

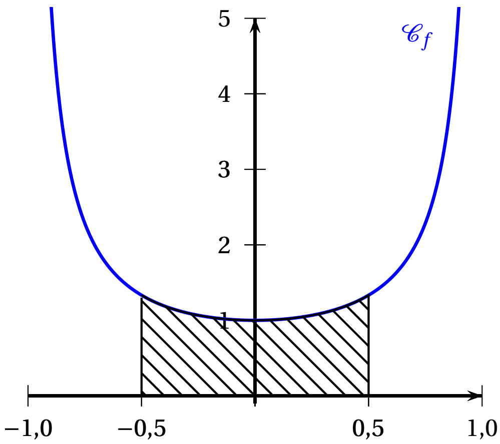
a. $(2\text{i})^4 = -16$.
b. La forme trigonométrique de $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\text{i}$ est $-3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$.
c. Soit z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2|$.
d. $\arg\left(\dfrac{(1+\text{i})^2}{\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\right) = -\dfrac{7\pi}{6} \quad [2\pi]$.

EXERCICE 8 **CALCULS D'INTÉGRALES**

a. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\text{d}x = \frac{1}{2}$.
b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,\text{d}x = \sqrt{2} - 1$.
c. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\,\text{d}x = \frac{\ln 3}{2}$.
d. $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2-1}{x+1}\,\text{d}x = 2$.

EXERCICE 9 **ÉTUDE DE FONCTION**

On considère la fonction f définie sur $]-1~;~1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (fig. ci-contre).



a. La dérivée de f est définie sur $]-1~;~1[$ par $f'(x) = \dfrac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$.

b. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse $x = 0,5$ est parallèle à la droite (D) d'équation $16x - 9y - 7 = 0$.

c. La fonction F définie sur $]-1\,;\,1[$ par $F(X) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ est une primitive de f.

d. L'aire du domaine (hachuré sur la figure) compris entre les droites d'équations $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ vaut, en unités d'aires du repère, $\dfrac{1}{2}\ln(3)$.

EXERCICE 10 **PROBLÈME AUTOUR DE LA FONCTION EXPONENTIELLE**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} + 5x + 4.$$

On définit f' la dérivée de f et f'' la dérivée de f'.

a. $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} + 5$ et $f''(x) = 2\mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.

b. $2\mathrm{e}^{x} - 1 > 0 \iff x < \ln 2$.

c. La fonction f' est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

d. f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 11 **PROBLÈME AUTOUR DE LA FONCTION LN**

On considère la fonction f définie sur $I =]5\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+1) - 3\ln(x-5) + 5.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

a. $f'(x) = \dfrac{4x+13}{(2x+1)(5-x)}$.

b. $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = 5$ comme asymptote verticale.

c. $f(x) = \ln\left[\dfrac{\mathrm{e}^{5}(2x+1)}{(x-5)^{3}}\right]$.

d. $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 5$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

EXERCICE 12 **UTILISATION DES ALGORITHMES DANS UNE SUITE**

Soit N un entier naturel.
On considère l'algorithme ALGO n° 1 ci-contre :
Par exemple, si on saisit la valeur 2 pour N, l'algorithme affiche le nombre 9 comme valeur de U.

Variables	N	I	U
Initialisation	2	—	1
Boucle pour	2	1	4
	2	2	9

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

a. L'algorithme ALGO n° 1 permet d'afficher la valeur de u_N connaissant N.
b. $u_4 = 16$.
c. L'algorithme ALGO n° 2 permet d'afficher la valeur de u_N connaissant N.
d. Pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.

```
ALGO n° 1

Début programme
    Lire N
    U prend la valeur 1
    Pour I allant de 1 à N
        Début Pour
        U prend la valeur U + 2 × I + 1
        Fin Pour
    Afficher U
Fin du programme
```

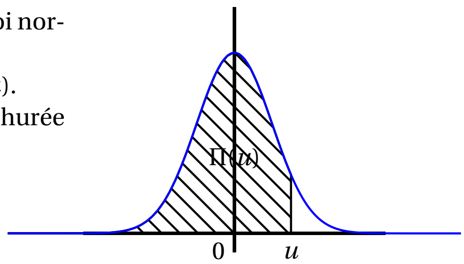
```
ALGO n° 2

Début programme
    Lire N
    U prend la valeur 1
    I prend la valeur 0
Tant que I < N Faire
        Début Tant que
        U prend la valeur U + 2 × I + 1
        I prend la valeur I + 1
        Fin Tant que
    Afficher U
Fin du programme
```

EXERCICE 13 **PROBABILITÉS CONTINUES**

La durée de vie (exprimée en années) d'un appareil électroménager avant la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a. Pour tout réel t strictement positif, $p(X \geqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
b. Si la probabilité d'avoir une panne la première année est égale à 0,2, alors $\lambda = \ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$.

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0\,;\,\sigma^2\right)$ avec $\sigma > 0$.
Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on pose $\Pi(u) = P(Y \leqslant u)$.
$\Pi(u)$ représente l'aire de la surface hachurée ci-contre.



c. $P(0 \leqslant Y \leqslant \sigma) > 0,4$.
d. $\Pi(-\sigma) \leqslant \dfrac{1}{10}$.

EXERCICE 14 **GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on donne les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives (P) : $x + y + 3z = 1$ et (Q) : $-y + 2z = 4$.

(D) est la droite dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -5t+1 \\ y &=& 2t \\ z &=& t-1 \end{array}\right.$ pour tout t réel.

a. Le plan (Q) est orthogonal à l'axe des abscisses.
b. Les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite Δ.
c. Une équation cartésienne de Δ est $x + 5z = 5$.
d. D est parallèle à Δ.

EXERCICE 15 **UTILISATION DES COMPLEXES EN GÉOMÉTRIE**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_{\text{A}} = 2-3\text{i}$, $z_{\text{B}} = \text{i}$, $z_{\text{C}} = 6-\text{i}$ et $z_{\text{D}} = -2+5\text{i}$.

a. $\dfrac{z_{\text{B}}-z_{\text{A}}}{z_{\text{C}}-z_{\text{A}}} = \text{i}$.

b. Le triangle ABC est équilatéral.

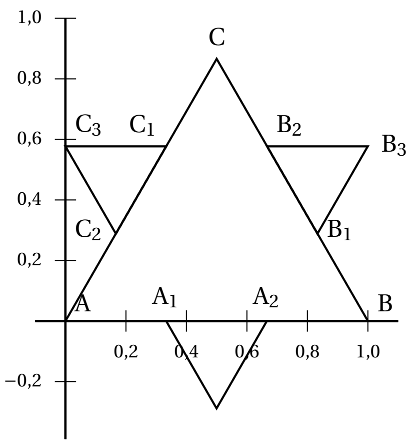
x et y désignent deux nombres réels, on note f la fonction qui, à tout point M d'affixe $z = x+\text{i}y$ distinct de i, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\text{i}(z-2+3\text{i})}{z-\text{i}}$.

c. La partie imaginaire de z' est $\dfrac{x^2-2x+y^2+2y-3}{x^2+(y-1)^2}$.

d. L'ensemble γ des points M d'affixe z tels que z' soit un réel est une droite.

EXERCICE 16 **UTILISATION DES ALGORITHMES EN GÉOMÉTRIE**

On effectue le programme de construction ci-dessous :

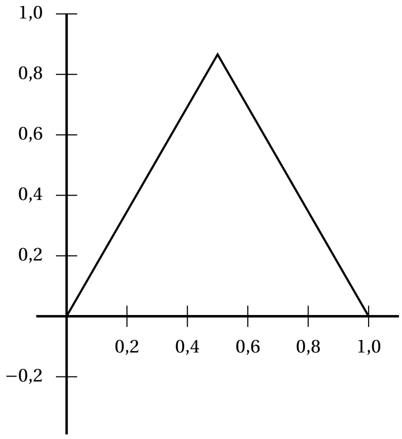


Étape 1 :

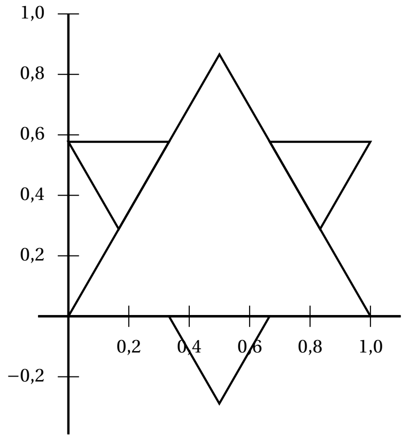
- On divise chaque côté d'un triangle équilatéral de côté 1 en 3 segments de même longueur (par exemple les segments : [A ; C_2], [C_2 ; C_1] et [C_1 ; C]).
- Sur chacun des côtés du triangle, on construit, à l'extérieur du triangle, un triangle équilatéral ayant pour base le second segment (par exemple le triangle $\text{C}_1\text{C}_2\text{C}_3$ ayant pour base le segment [C_2 ; C_1] pour le côté [A ; C]).

Étapes suivantes :

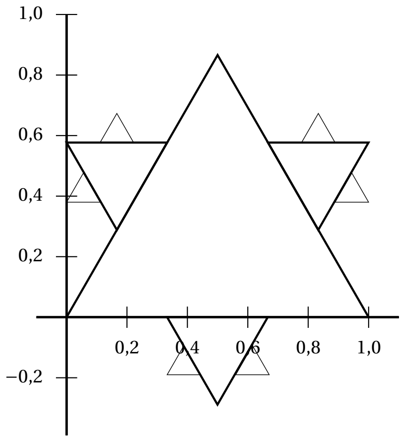
Sur chaque triangle obtenu à l'étape précédente, on construit deux nouveaux triangles équilatéraux selon le même procédé de construction que celui de l'étape 1.



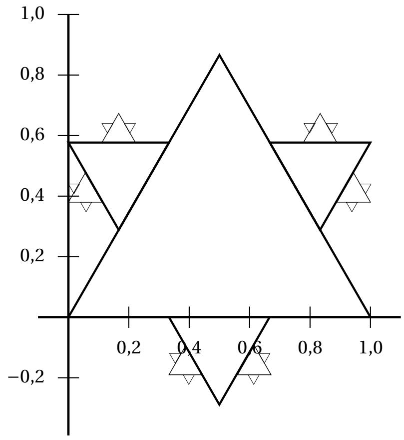
Étape 0



Étape 1



Étape 2



Étape 3

Pour tout entier naturel n, on pose :

- u_n le nombre de triangles construits à l'étape n,
- ℓ_n la longueur du côté du triangle équilatéral construit à l'étape n,
- h_n la hauteur du triangle équilatéral construit à l'étape n,
- s_n la surface que l'on colore à l'étape n.

a. $h_1 = \dfrac{1}{2 \times \sqrt{3}}$.

b. La suite $(\ell_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$.

c. $h_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2 \times 3^n}$.

d. Si $n \geqslant 1$, alors $s_n = \dfrac{3 \times \sqrt{3} \times \left(\dfrac{2}{9}\right)^n}{8}$.