Concours Fesic–Puissance 11 – 13 mai 2017

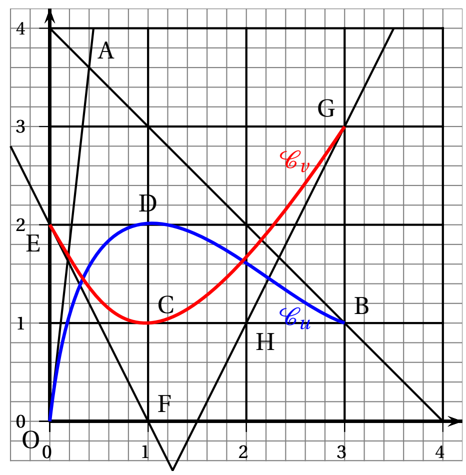
Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1
Lecture graphique

Dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on donne les points A(0,4 ; 3,6), B(3 ; 1), C(1 ; 1), D(1 ; 2), E(0 ; 2), F(1 ; 0), G(3 ; 3) et H(2 ; 1).

Soit u et v deux fonctions définies sur l'intervalle [0 ; 3] de courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ tracées ci-contre.
On donne les informations suivantes :

- La droite (OA) est tangente à $\mathscr{C}_u$ à l'origine du repère .
- La droite (AB) est tangente à $\mathscr{C}_u$ au point B .
- Les droites (EF) et (GH) sont tangentes à $\mathscr{C}_v$ respectivement aux points E et G.
- $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ admettent respectivement aux points D et C une tangente horizontale.



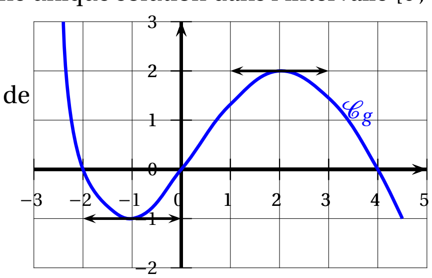
a. $v'(3) = 3$.
b. $u'(0) = 9$.
c. $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(1) = v'(1)$.
d. $(u \times v)'(3) = 1$.

EXERCICE 2
Petites questions de logique sur les fonctions

Soit f une fonction définie et dérivable sur [0 ; 1] .

a. $f(0,5)$ est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.
b. Si $f(0) > 1$ et $f(1) < 0$ alors l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution dans l'intervalle [0 ; 1].

Soit g une fonction définie sur l'intervalle [−2,5 ; 4,5] de courbe représentative $\mathscr{C}_g$ ci-contre.



c. Si $g(x) = 0$ alors $x = 4$.
d. Si $x \in \{-1 ; 0 ; 2 ; 4\}$ alors $g'(x) \times g(x) = 0$.

EXERCICE 3
Suites et algorithmes

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$.

Pour tout entier naturel n on pose (v_n) la suite définie par $v_n = u_n^2 - 4$.
On donne les valeurs arrondies à 10^{-2} suivantes :

$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{15}$
1,41	1,73	2,24	2,45	2,62	2,83	3,16	3,32	3,46	3,61	3,74	3,87

a. $u_1 = \sqrt{3},\quad u_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$ et $u_3 = \dfrac{3\sqrt{7}}{4}$.
b. La suite (v_n) est géométrique .
c. On démontre que, pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{\dfrac{4^n - 1}{4^{n-1}}}$.

On considère l'algorithme suivant :

d. Si $E = 0,1$ alors $N = 2$.

Variables	N est un nombre entier naturel U est un nombre réel E est un nombre réel
Traitement	Lire E Affecter à N la valeur 0 Affecter à U la valeur 0 Tant que $2 - U > E$ faire Début Tant que U prend la valeur $\dfrac{\sqrt{U^2 + 12}}{2}$ N prend la valeur $N + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher N

EXERCICE 4
Limites et asymptotes

a. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x + 1}{x^2 - 3} = -\infty$.
b. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2}{3} x\mathrm{e}^x = -\infty$.

Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} + 1}{x + 1}$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
c. $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.
d. $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale.

EXERCICE 5
Calculs d'intégrales

a. $\displaystyle\int_0^1 2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$.
b. $\displaystyle\int_1^2 \left(2 - \dfrac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$.
c. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)$.

d. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{\mathrm{e}}$.

EXERCICE 6
Étude de deux fonctions

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \ln(2x)$ et $g(x) = \ln\left(x^2-1\right)$ de courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

a. $g\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$.
b. $g'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.
c. La tangente à $\mathscr{C}_g$ en $x = \sqrt{2}$ a pour équation $y = 2\sqrt{2}x - 4$.
d. Si $x \in \left]1\ ;\ 1+\sqrt{2}\right]$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est située au dessus de $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 7
Étude d'une fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x}$.

a. $f(1) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
b. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.
c. $f'(x) = f(x)$.
d. L'équation $f(x) = \dfrac{1}{3}$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 8
Notions de base sur les complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Le point A a pour affixe $z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}$.
Soit C le cercle de centre O passant par le point A.
Soit B un point de C d'affixe réelle z_{B} positive.
On définit le point E tel que le quadrilatère OBEA soit un losange.

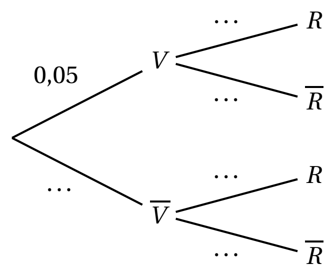
a. $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
b. L'affixe du point B est $z_{\mathrm{B}} = \dfrac{3}{2}$.
c. L'affixe du point E est $z_{\mathrm{E}} = \left(1+\sqrt{2}\right) + \mathrm{i}$.
d. $\mathrm{OE} = 2\sqrt{2}$.

EXERCICE 9
Petit exercice de probabilité

Mon vélo est sujet à de trop fréquentes crevaisons.
Une fois sur dix, quand je prends mon vélo au moins l'une des deux roues est crevée ; la probabilité que la roue avant soit crevée vaut 0,05 et les crevaisons à la roue avant et à la roue arrière sont indépendantes.

Je vais chercher mon vélo un jour quelconque, on note :

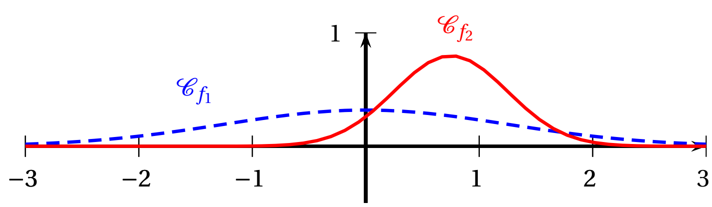
- V l'évènement « la roue avant est crevée ».
- R l'évènement « la roue arrière est crevée ».



a. $P(V \cup R) = 0,1$ et $P(V \cap R) = 0,05 \times P(R)$.
b. J'ai constaté que la roue arrière était crevée ; la probabilité que la roue avant le soit également vaut $0,05$.
c. La roue avant et la roue arrière ont la même probabilité d'être crevées.
d. Il y a une chance sur 380 pour que les deux roues soient crevées.

EXERCICE 10
Probabilités continues

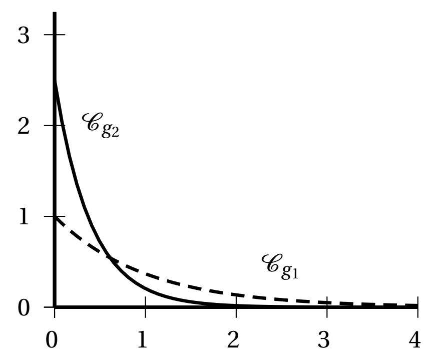
Soit μ_1 et μ_2 deux nombres réels, σ_1 et σ_2 deux nombres réels positifs.
Sur le graphique ci-dessous ont été représentées $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{f_2}$ respectivement les courbes représentatives des fonctions densité f_1 et f_2 de deux lois normales $\mathcal{N}\left(\mu_1 ; \sigma_1^2\right)$ et $\mathcal{N}\left(\mu_2 ; \sigma_2^2\right)$.



($\mathscr{C}_{f_1}$ en pointillés et $\mathscr{C}_{f_2}$ en trait plein)

a. $\mu_1 < \mu_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$.

Soit λ_1 et λ_2 deux nombres réels strictement positifs.
Sur le graphique ci-contre ont été représentées $\mathscr{C}_{g_1}$ et $\mathscr{C}_{g_2}$ respectivement les courbes représentatives des fonctions densité g_1 et g_2 de deux lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.



($\mathscr{C}_{g_1}$ en pointillés et $\mathscr{C}_{g_2}$ en trait plein)

b. $\lambda_1 < \lambda_2$.

Dans une région agricole, le rendement des parcelles de blé peut être assimilé à une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 8 (en quintaux par hectare.)
On choisit une parcelle au hasard et on note R son rendement.
c. La variable aléatoire $Z = \dfrac{R - 100}{8^2}$ suit la loi normale centrée réduite.
d. La probabilité que la parcelle ait un rendement inférieur à 116 quintaux par hectare est égale à $0,9$.

EXERCICE 11

Notions de base dans l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère des deux plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives (P) : $x - y = 0$ et (Q) : $y + 2z - 3 = 0$.
Ces plans se coupent selon une droite Δ et on pose K le point de coordonnées K$(1\,;0\,;2)$.

a. (P) et (Q) sont deux plans orthogonaux,

b. Le vecteur $\vec{u}\,(2\,;\,2\,;\,-1)$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

c. $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t\\ y & = & t\\ z & = & \dfrac{3-t}{2}\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite Δ.

d. Le plan (R) d'équation cartésienne $2x + 2y - z = 0$ est parallèle à Δ et contient la droite (OK).

EXERCICE 12

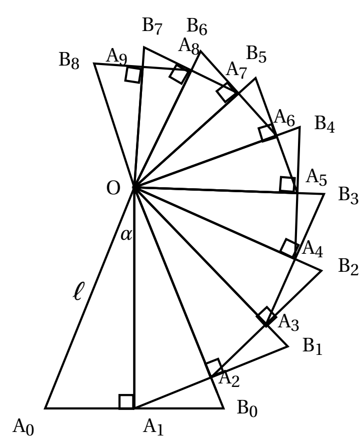
Utilisation des complexes en géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit (E) l'équation $z^2 - 6z + 12 = 0$.
a. (E) admet deux solutions complexes z_1 et z_2.
On pose z_1 la solution ayant une partie imaginaire positive.
b. $4 - z_1 = 2\text{e}^{2\text{i}\frac{\pi}{3}}$.
Soit A le point d'affixe $z_\text{A} = 4$ et M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
c. $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{O}M_1}\right) = \dfrac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.
d. Le point M_1 est situé sur le cercle de diamètre [OA].

EXERCICE 13

Un peu de trigonométrie dans l'escargot

Dans le triangle OA_0B_0 isocèle en O, A_1 est le milieu du segment $[\text{A}_0\,;\,\text{B}_0]$.
On note B_1 le symétrique de A_1 par rapport à la droite (OB_0) et A_2 le milieu du segment $[\text{A}_1\,;\,\text{B}_1]$.
En réitérant le processus on obtient, pour tout entier naturel n, une suite de triangles isocèles OA_nB_n (cf figure ci -dessous).
On pose $\alpha = \widehat{\text{A}_0\text{OA}_1}$ et $\ell = \text{OA}_0$.



« Il y a loin de la route aux escargots »

Paul Éluard - Proverbes

a. Pour tout entier naturel n on a $\mathrm{OA}_{n+1} = \sin\alpha \times \mathrm{OA}_n$ et $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = \cos\alpha \times \mathrm{OA}_n$.
b. Pour tout entier naturel n on a $\mathrm{OA}_n = \ell \times (\cos\alpha)^n$.

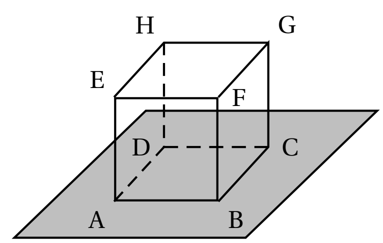
On pose, pour tout entier naturel n non nul, la suite (L_n) définie par
$L_n = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \cdots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$.
c. $L_n = \ell \times \sin\alpha \times \dfrac{1-(\cos\alpha)^{n+1}}{1-\cos\alpha}$.
On rappelle que, pour tout réel x, on a $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ et $\sin(2x) = 2\times\sin x\times\cos x$.
d. $L_n = \ell \times \dfrac{1-(\cos\alpha)^n}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

EXERCICE 14
Fonction dépendant d'un paramètre

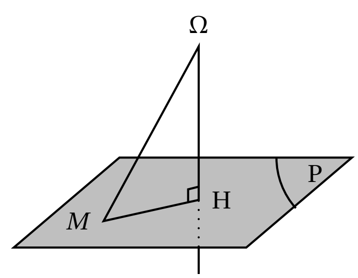
Pour tout nombre réel k strictement positif, on définit la fonction f_k par
$f_k(x) = (x+k)\mathrm{e}^{-x}$ de courbe représentative $\mathscr{C}_k$.
Par exemple si $k = 7$, la fonction f_7 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_7(x) = (x+7)\mathrm{e}^{-x}$ de courbe représentative $\mathscr{C}_7$.
a. $\mathscr{C}_k$ coupe les axes du repère aux points de coordonnées $(k\,;\,0)$ et $(0\,;\,k)$.
b. Si $k = 3$ alors la fonction f_3 admet e^2 comme minimum sur $\mathbb{R}$.
c. La fonction F_k, définie par $F_k(x) = (-x-1-k)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f_k.
d. L'aire de la portion de plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_3$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $4 - 5\mathrm{e}^{-1}$.

EXERCICE 15
Notions d'espace dans un cube

ABCDEFGH est un cube de côté 1 et $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.
a. Le volume du tétraèdre BCDG est égal à $\dfrac{1}{6}$.
b. L'aire du triangle BDG est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



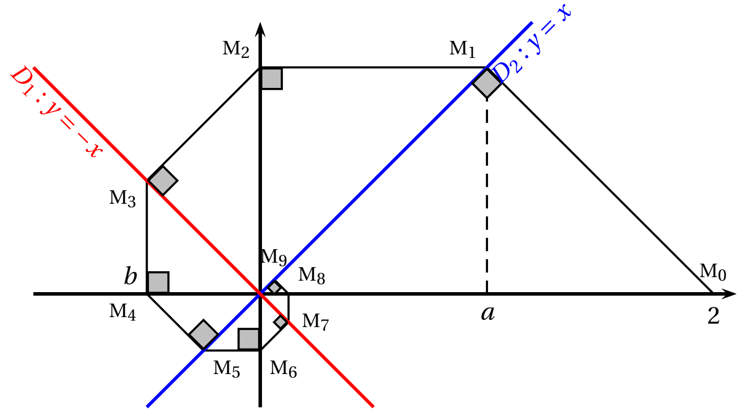
Définition : On appelle **distance du point Ω au plan** (P) la plus petite distance ΩM avec M un point du plan (P), elle représente la distance ΩH avec H le projeté orthogonal du point Ω dans le plan (P),
c. La distance du point C au plan (BDG) est égale à $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
d. Une équation cartésienne du plan (BDG) est $x+y-z-1 = 0$



EXERCICE 16
Étude d'une spirale

Soit $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé du plan.
D_1 et D_2 sont les droites d'équations $D_1 : y = -x$, $D_2 : y = x$ et M_0 représente le point de coordonnées $(2\,;\,0)$.

On construit M_1 le projeté orthogonal de M_0 sur la droite D_2, M_2 le projeté orthogonal de M_1 sur l'axe des ordonnées, M_3 le projeté orthogonal de M_2 sur la droite D_1 et M_4 le projeté orthogonal de M_3 sur l'axe des abscisses.
On réitère le même procédé afin de définir, pour tout entier naturel n , la suite de points (M_n) représentée ci-dessous.



On note a l'abscisse du point M_1 et b l'abscisse du point M_4 avec a et b deux nombres réels.

a. $a = 1$ et $M_1M_2 = 1$.

b. $M_2M_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour tout entier naturel n, on définit les suites (l_n) et (S_n) à l'aide des relations

$$l_n = M_nM_{n+1} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} l_k.$$

c. $l_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times l_n$.

d. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = 2\sqrt{2} + 1$.