∽ Concours Fesic mai 2005 ∾

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. + 1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On considère la fonction f qui, à tout complexe z non nul, associe le complexe : $z' = f(z) = \left(\dfrac{z}{|z|}\right)^2$.

Soient $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $z' = f(z)$. On appelle M le point de coordonnées $(x\,;\,y)$ d'affixe z et M' le point de coordonnées $(x'\,;\,y')$ d'affixe z'.

a. On a $x' = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

b. $z' \in \mathbb{R}$ si et seulement si M appartient à l'axe des ordonnées.

c. $\left[f(1+\text{i})\right]^8$ est un nombre réel.

d. Il existe un et un seul point M tel que M et M' soient confondus.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit $m \in \mathbb{R}^*$. On considère les points A, J, K et M d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1 + \text{i}$, $z_{\text{J}} = \text{i}$, $z_{\text{K}} = 2 + \text{i}$ et $z_M = 1 + \text{i}m$. Soit N le symétrique de M par rapport à A.

a. Le point N a pour affixe $1 + \text{i}(2 - m)$.

b. Quel que soit $m \in \mathbb{R}^*$, K est l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{J}M}$.

c. Il existe une valeur de m et une seule telle que K soit l'image de J par la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

d. Soit $m = 2$. Pour prouver que les droites (OA) et (MK) sont perpendiculaires, il faut et il suffit de prouver que $z_{\text{A}}(z_{\text{K}} - z_M) = 0$.

EXERCICE 3

On appelle z le complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$ et on pose $t = \dfrac{1 - \text{i}}{\sqrt{2}}$.

a. Soit $n \in \mathbb{Z}$. t^n est un nombre réel si et seulement si n est un multiple de 4.

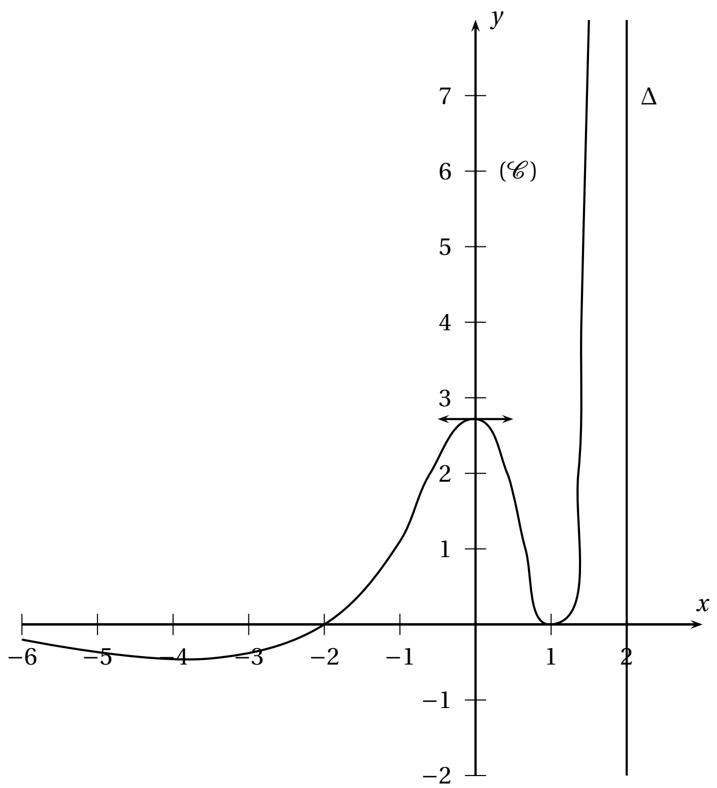
b. $\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $\dfrac{z^2}{\overline{t}^3}$.

c. La partie réelle de z^{10} est -2^9.

d. $1 + t + t^2 + \cdots + t^8 = 1$.

EXERCICE 4

On considère la courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous, la droite $\Delta : x = 2$ et l'axe des abscisses étant asymptotes à $(\mathscr{C})$. On appelle f la fonction représentée par $(\mathscr{C})$ et g la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$.



a. g est définie sur $]-2\ ;\ 2[$.

b. g est dérivable en 0 et $g'(0) = \dfrac{1}{\text{e}}$.

c. L'équation $g(x) = 1$ possède exactement deux solutions.

d. $\lim\limits_{x \to 0} g \circ g(x) = -\infty$.

EXERCICE 5

a. Soit f la fonction définie sur $\text{I} = \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \ln(\cos x) - \cos(\ln x)$. f est dérivable sur I et, pour tout $x \in \text{I}$, $f'(x) = -\tan x + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

b. Soit $x \in [-1\ ;\ 2]$. On a $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{2x+1}{x^2+1} \leqslant 1$.

c. La courbe représentant la fonction $x \to \ln(2x-6)$ dans un repère du plan se déduit de la courbe représentant $x \to \ln x$ par une translation d'un vecteur de coordonnées $(3\,;2)$.

d. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \text{e}^{-x^2 \sin x}$.$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x\,[2\sin(\pi + x) + x\cos(\pi + x)]\,\text{e}^{-x^2 \sin x}$.

EXERCICE 6

a. On considère le raisonnement suivant :

« Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \geqslant 1+nx$. En particulier pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ on obtient $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geqslant 1+\sqrt{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\sqrt{n}\right) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = +\infty$. » Ce raisonnement est exact.

b. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$ et on considère le raisonnement suivant :

« f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, comme $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = 0 = f(0)$, c'est que f est continue en 0. Il s'ensuit que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et donc est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ ». Ce raisonnement est exact.

c. Soit f la fonction définie sur $\mathrm{D} =]-\infty~;~-1[\cup]1~;~+\infty[$ par : $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

On considère le raisonnement suivant :

« f est définie et dérivable sur D car composée par des fonctions définies et dérivables sur D. Pour $x \in \mathrm{D}$ on peut écrire : $f(x) = x[\ln(x-1) - \ln(x+1)]$ et on obtient alors

$$f'(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1) + x\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{2x}{(x-1)(x+1)}.\text{»}$$

Ce raisonnement est exact.

d. Soit $P(n)$ la phrase définie sur $\mathbb{N}$ par : « 4^n+1 est divisible par 3. » On considère le raisonnement suivant :

« Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ soit vraie. Montrons que $P(n_0+1)$ est vraie. Puisque $P(n_0)$ est vraie, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4^{n_0}+1 = 3k$. On a alors $4^{n_0+1}+1 = 4\times 4^{n_0}+1 = 3\times 4^{n_0}+4^{n_0}+1 = 3\times 4^{n_0}+3k = 3\left(4^{n_0}+k\right)$.

Ceci prouve que $4^{n_0}+1$ est un multiple de 3 et donc que $P(n_0+1)$ est vraie. On en déduit que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. » Ce raisonnement est exact.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $]-1~;~1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = -2$.

b. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

c. Pour $x \in]-1~;~1[$ et $x \neq 0$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ existe et vaut $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

d. Soient g la fonction définie sur $]-1~;~1[$ par $g(x) = f(|x|)$ et (Γ) la courbe représentant g dans le même repère que $(\mathscr{C})$. On déduit (Γ) à partir de $(\mathscr{C})$ par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

EXERCICE 8

E désigne la fonction « partie entière ». Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = x\ln x$ si $x > 0$.

a. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f \circ E(x) = 0$.

b. $\displaystyle\int_0^4 E(x)\,\mathrm{d}x = 6$.

c. Il existe une et une seule valeur réelle x telle que $f(x) = -x$.

d. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne l'aire de la portion de plan située entre les droites d'équation $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}},\ x = \mathrm{e},\ y = 0$ et la courbe $(\mathscr{C})$ représentant f.

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t$.

a. f est définie sur $]-1\ ;\ 1[$.

b. f est croissante sur $]-1\ ;\ 1[$.

c. $f(0) = 1$.

d. f est une fonction paire.

EXERCICE 10

Pour tout entier $n,\ n \geqslant 3$, on désigne par u_n le nombre de diagonales d'un polygone convexe ayant n côtés.
On appelle u la suite ainsie définie pour $n \geqslant 3$, de terme général u_n.

a. $u_5 = 6$ et $u_6 = 10$.

b. Pour tout entier $n,\ n \geqslant 3$, on a $u_{n+1} = u_n + n - 1$.

c. La suite u est une suite arithmétique de raison $n - 1$.

d. Pour tout entier $n,\ n \geqslant 3$, on a : $u_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

EXERCICE 11

On considère les suites u et v définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1,\ v_0 = \sqrt{2}, N u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

a. Soit w la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = v_n - u_n$. La suite w est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

c. La suite v est décroissante.

d. Les deux suites u et v convergent et ont la même limite.

EXERCICE 12

On considère la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 0,\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4-u_n}$.

Soit v la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 3}$. On considère enfin la suite w définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = \ln(v_n)$. On admet que $u,\ v,\ w$ sont bien définies.

a. Quelque soit $n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{3^{n+1}}$.

b. w est une suite arithmétique dont la raison est égale au premier terme.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$; $\ln(v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n) = -(n+1)(n+2)\ln\left(\sqrt{3}\right)$.

d. La suite u est convergente.

EXERCICE 13

Un sondage fait état de l'intérêt d'un certain nombre de personnes sur la lecture de trois revues, appelées A, B et C. Tous les chiffres cités ci-dessous font référence à ces personnes sondées.
Parmi les personnes interrogées, 75 lisent A, 58 lisent B et 60 lisent C. On sait de plus que 18 lisent A et B, 18 lisent B et C et 15 lisent A et C. Enfin 3 personnes lisent les trois revues et 5 personnes ne lisent aucune de ces revues.
Par ailleurs, et parmi les personnes qui ne lisent que la revue A, 20 sont des femmes ; parmi les personnes qui ne lisent que la revue B, les deux-cinquièmes sont des femmes ; parmi les personnes qui ne lisent que la revue C, il y a moitié-moitié d'hommes et de femmes.

a. 150 personnes ont été sondées.

b. 100 personnes lisent une et une seulement de ces trois revues.

c. On interroge au hasard une personne du sexe masculin qui ne lit que l'une des trois revues. Il y a 25 % de chances qu'il s'agisse d'un homme qui ne lise que la revue A.

d. On interroge au hasard une personne qui ne lit que l'une des trois revues. Il y a 25 % de chances qu'il s'agisse d'un homme qui ne lise que la revue A.

EXERCICE 14

Un feu tricolore de circulation reste 55 secondes au vert et 5 secondes à l'orange, temps pendant lesquels un piéton ne peut pas traverser. Puis il reste 60 secondes au rouge, temps pendant lequel un piéton peut traverser. Dans l'exercice, on ne s'intéresse qu'aux seuls piétons qui se présenteraient pour traverser à ce feu tricolore entre 8 h 00 et 8 h 05.
À 8 h 00, ce feu se met au rouge. On appelle T la variable aléatoire qui donne, en secondes, le temps écoulé entre 8 h 00 et l'heure d'arrivée devant ce feu d'un piéton qui souhaite traverser. On admet que T suit une loi uniformément répartie sur l'intervalle $[0 ; 300]$.

a. La densité de probabilité associée à T est la fonction f ainsi définie :

$f(t) = \dfrac{1}{3}$ si $t \in [0 ; 60[$ ou si $t \in [120 ; 180[$ ou si $t \in [240 ; 300[$; $f(t) = 0$ dans les autres cas.

b. La probabilité qu'un piéton attende moins de 10 secondes est $\dfrac{2}{3}$.

c. La probabilité qu'un piéton attende plus de 40 secondes est $\dfrac{2}{15}$.

d. Entre 8 h 00 et 8 h 05, 10 piétons se présentent à ce feu tricolore. La probabilité que 3 d'entre eux exactement aient attendu moins de 10 secondes est $\dfrac{2^3}{3^{10}}$.

EXERCICE 15

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit (D) la droite définie pour $t \in \mathbb{R}$ par : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3t+1 \\ y &=& -4t+3 \\ z &=& t+1 \end{array}\right.$. Lorsque $t \in [0 ; 1]$, l'ensemble des points M

de (D) décrivent un segment ; soient A et B les extrémités de ce segment, A étant le point dont les coordonnées sont toutes positives. Soit (S) la sphère de diamètre [AB]. Soient (P) le plan d'équation $x - y - z + 3 = 0$ et C le point de coordonnées (3 ; 3 ; 3).

a. Une équation cartésienne de (D) est $\dfrac{1-x}{3} = \dfrac{3-y}{4} = z - 1$.

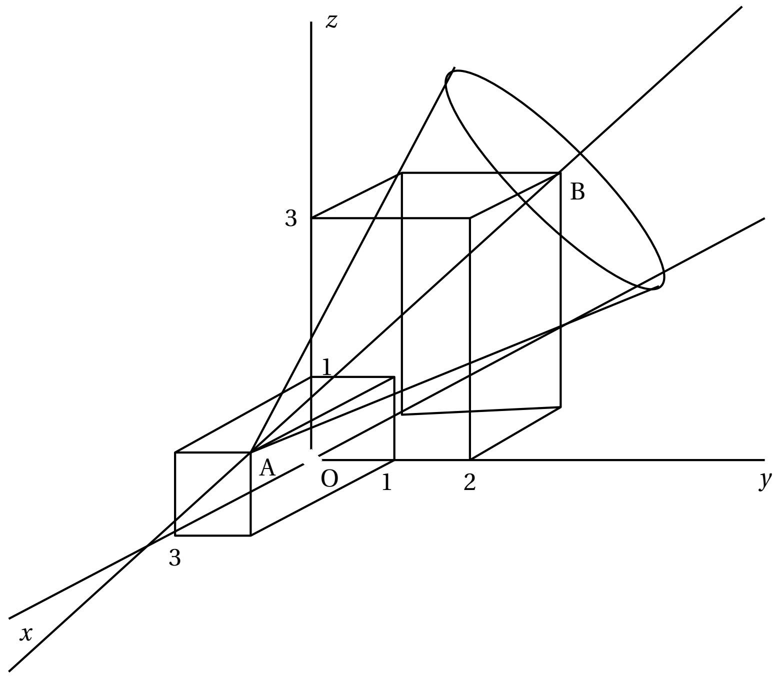
b. Le plan (P) contient la droite (D).

c. Une équation de (S) est donnée par $(x-1)(x+2)+(y-3)(y+l)+(z-1)(z-2) = 0$.

d. Soit G le barycentre de {(A, 1) ; (B, −1) ; (C, −1)} (on notera que G existe puisque la somme des coefficients n'est pas nulle). Le triangle GAC est isocèle.

EXERCICE 16

Le schéma ci-dessous représente une situation de l'espace dans un repère approprié.



On appelle (P) le plan perpendiculaire à (AB) passant par B et on appelle (C) le cône de sommet A et dont la base est le disque de centre B et de rayon 2.

a. Une équation de (P) est : $5x - y - 2z + 18 = 0$.

b. La distance de A à (P) est $\sqrt{30}$ en unités de repère.

c. On considère le raisonnement suivant : « Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de l'espace. M appartient à (AB) s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AB}}$. Dans ce cas, on a $\left\{\begin{array}{lcl} x-3 & = & -5t \\ y-1 & = & t \\ z-1 & = & 2t \end{array}\right.$. On en déduit $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3-5t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 1+2t \end{array}\right.$ »

Ce raisonnement donne de façon nécessaire et suffisante une équation paramétrique de la droite (AB).

d. L'intersection de (C) et du plan $(y\text{O}z)$ est un disque.