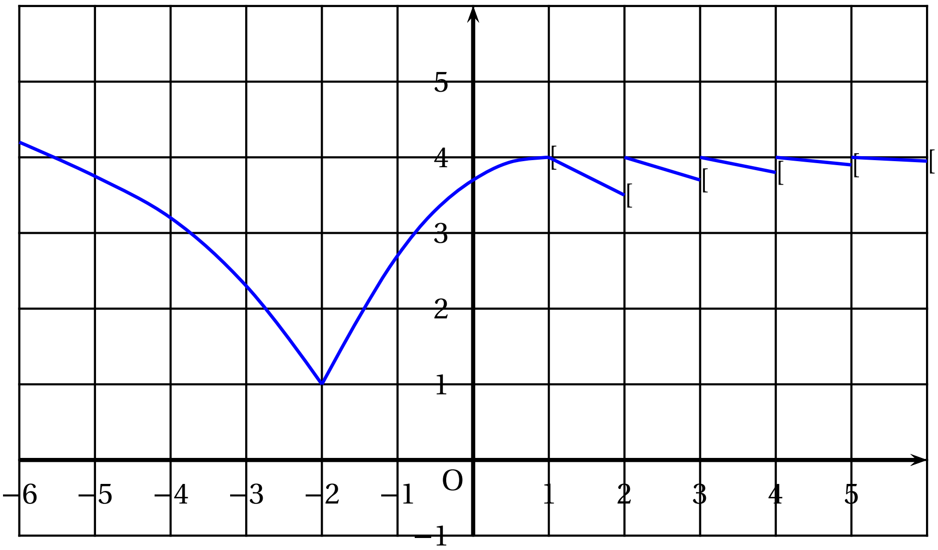
Concours d'entrée FESIC mai 2003

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et représentée par la courbe ci-dessous :



a) f est dérivable au point d'abscisse $x = -2$.
b) f est continue au point d'abscisse $x = 1$.
c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.
d) Sur l'intervalle $]-2\ ;\ 1[$, la fonction f', dérivée de f sur cet intervalle, est croissante.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\right) = 1$.

On d ?signe par $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f.

a) On a $\mathcal{D} =]0\ ; +\infty[$.

b) f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et, pour tout $x \in \mathcal{D},\ f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 1}$.

c) Pour tout $x \in \mathcal{D},\ f(x) < 0$.

d) L'équation $f(x) = -1$ possède l'unique solution $x = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}\right)$.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -(1+x)\text{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère cité.
a) f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
b) La fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (x+2)\text{e}^{-x}$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
c) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. L'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0,\ x = t$ et $y = 0$ se calcule, en unités d'aires, par : $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\text{d}x$.
d) L'aire définie à la question **c)** est finie quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\text{d}t$.
a) $\text{I}_1 = \ln 2$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n \geqslant 0$.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
d) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Exercice 5

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{2\ln t}{t}\,\text{d}t$.
a) Pour $n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = 2n - 1$.
b) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
c) La suite $\left(\dfrac{I_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\text{I}_1 + \text{I}_2 + \cdots + I_n = n^2$.

Exercice 6

a) $17 + 20 + 23 + \cdots + 62 = 632$.
b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{127}{128}$.
c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. f est dérivable sur $]1\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x > 1$, on a : $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$.

d) Si une suite n'est pas arithmétique, alors elle est géométrique.

Exercice 7

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad v_n = u_n - 1 + \frac{1}{n!}.$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{n+1}$.
b) La suite (u_n) est décroissante.
c) La suite (v_n) est croissante.
d) Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 8

Dans le plan complexe, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' telles que :

$$z' = z\overline{z} + (1+\mathrm{i})z + 3\overline{z} - 2.$$

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec x, y, x' et y' réels.
a) $x' = x^2 + y^2 + 4x - y - 2$ et $y' = x - 2y$.
b) L'ensemble E_1 des points M tels que z' soit réel est une droite.
c) L'ensemble E_2 des points M tels que z' soit imaginaire est un cercle.
d) E_1 et E_2 ne sont pas sécants.

Exercice 9

Dans le plan complexe, on considère le point Ω d'affixe 1, puis le cercle Γ de centre Ω et de rayon 2, et enfin les points A, B, C et D d'affixes respectives z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D}, où :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i},\ z_{\mathrm{C}} = \overline{z_{\mathrm{B}}},\ z_{\mathrm{D}} = \overline{z_{\mathrm{A}}}.$$

a) $\dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}} = \sqrt{3}$.
b) D est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
c) Les points A, B, C et D appartiennent au même cercle Γ.
d) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'équation : $z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$.

Les solutions de cette équation sont les affixes de deux points qui appartiennent tous les deux au cercle Γ.

Exercice 10

Le plan complexe a pour origine O. Soit M le point dont l'affixe a pour module 1 et pour argument $\dfrac{5\pi}{6}$.

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et on appelle h l'homothétie de centre O et de rapport -3.

a) On a : $\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)^6=-1$.

b) L'image de M par la rotation r est le point M_1 de coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

c) L'image de M par l'homothétie h est le point M_2 dont l'affixe a pour module -3 et pour argument $\dfrac{5\pi}{6}$.

d) $r^3(M)=r\circ r\circ r(M)$ est le point M_3, symétrique de M par rapport à O.

Exercice 11

Soit $x\in\mathbb{R}$. On considère la suite géométrique $(u_n(x))_n$ de premier terme $u_0(x)=1$ et de raison $q=1-2\mathrm{e}^{-x}$.

a) Dans le développement de $u_6(x)=\left(1-2\mathrm{e}^{-x}\right)^6$, le terme correspondant à e^{-4x} est $240\mathrm{e}^{-4x}$.

b) Pour x fixé supérieur à 1, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n(x)=0$.

c) Pour un entier naturel n fixé, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}u_n(x)=0$.

d) Un lanceur s'exerce à tirer sur une cible située à la distance x (x en mètres, $x\geqslant 1$). La probabilité qu'il atteigne sa cible est $p=2\mathrm{e}^{-x}$. Le lanceur tire n fois vers la cible de façons supposées indépendantes.

La probabilité que ce lanceur atteigne k fois exactement la cible (k étant un entier compris entre 0 et n) est $\binom{n}{k}\times u_1^{n-k}(x)\times(1-u_1(x))^k$.

Exercice 12

On note $x(t)$ le nombre d'atomes de radium d'une substance radioactive présents à l'instant t (exprimé en années) dans cette substance, et on admet que la vitesse d'élimination $x'(t)$ est proportionnelle à $x(t)$: il existe donc une constante réelle k, telle que $x'(t)=kx(t)$.

On appelle x_0 le nombre d'atomes présents à l'instant $t = 0$.
a) Le nombre d'atomes diminue quand t augmente, donc k est négatif.
b) ¿ chaque instant t, on a : $x(t) = x_0 \mathrm{e}^{kt}$.
c) On note T la période (ou « demi-vie »), c'est-à-dire le nombre d'années pour lequel le nombre d'atomes a diminué de moitié par rapport à l'instant initial $t = 0$.
On a $\mathrm{T} = \dfrac{-\ln 2}{k}$.
d) A l'instant $t = 3T$, il reste le sixième des atomes dans la substance.

Exercice 13

La durée en années du bon fonctionnement d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire de loi exponentielle. Des tests garantissent une durée moyenne de 10 ans.
a) Le paramètre de la loi exponentielle est 10.
b) La probabilité pour que l'un de ces composants fonctionne correctement moins de 10 ans est $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
c) La probabilité pour que l'un de ces composants fonctionne pendant au moins 10 années est e^{-2}.
d) La probabilité pour que l'un de ces composants fonctionne entre 10 et 15 années est $\dfrac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1,5}}{1 - \mathrm{e}^{-1}}$.

Exercice 14

60 % des candidats au concours de la FESIC sont des filles. Parmi elles, 30 % ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale.
Par ailleurs, 20 % des candidats sont des garçons qui ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale.
a) On interroge un candidat au hasard. La probabilité que ce soit une fille qui ait suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale est de 30 %.
b) On interroge un garçon qui est candidat. La probabilité qu'il ait suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale est de 20 %.
c) 38 % des candidats ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale.
d) On interroge un candidat qui a suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale. La probabilité qu'il s'agisse d'une fille est $\dfrac{9}{19}$.

Exercice 15

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ données par les équations paramétrées suivantes :

$$\mathscr{D}\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t-1 \\ y & = & -3t+2,\ t \in \mathbb{R} \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad \mathscr{D}'\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t \\ y & = & t+2,\ t \in \mathbb{R} \\ z & = & 3t-2 \end{array}\right.$$

a) $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.
b) On trouvera les points d'intersection éventuels entre $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2t-1 & = & 3t \\ -3t+2 & = & t+2 \\ t & = & 3t+2 \end{array}\right.$$

c) Le plan normal à $\mathscr{D}$ passant par O a pour équation : $2x - 3y + z = 0$.
d) $\mathscr{D}'$ est parallèle à tout plan normal à $\mathscr{D}$.

Exercice 16

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(0 ; 4 ; −1), B(−2 ; 4 ; −5), C(1 ; 1 ; −5), D(1 ; 0 ; −4) et E(2 ; 2 ; −1).
a) Une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y - z - 9 = 0$.
b) Le point E est le projeté orthogonal de D sur (ABC).
c) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
d) Le point $\Omega(-1 ; 2 ; -3)$ est le centre d'une sphère passant par A, B, C et D.