Concours d'entrée FESIC mai 2002

Dans toute question où il intervient le plan (respectivement l'espace) est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right) = (\text{O}xy)$ (respectivement $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right) = (\text{O}xyz)$).

Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{\ln\left(\sqrt{x}\right)},$$

$\mathcal{D}$ son ensemble de définition et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
a) On a : $\mathcal{D} =]0,\ +\infty[$.
b) La courbe $\mathcal{C}$ admet une droite asymptote en $+\infty$.
c) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $f(x) < \dfrac{x}{2}$.
d) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x(\ln x)^2}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin(\pi x)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
a) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 1 + \cos(\pi x)$.
b) On a : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = 1 + \pi$.
c) La courbe $\mathcal{C}$ coupe la première bissectrice en chaque point d'abscisse $x = k + \dfrac{1}{2}$, où $k \in Z$.
d) La courbe $\mathcal{C}$ admet la première bissectrice comme droite asymptote en $+\infty$.

Exercice 3

Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x+1} - 1\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \text{e}^{-2x} + 2\text{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et Γ celle de g. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\pi/2$. On note M' le point de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ et d'affixe z', image par R du point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et d'affixe z.

a) L'ensemble de définition de f est $\mathrm{I} =]-1\ ;\ +\infty[$.
b) On a : $z' = \mathrm{i}z$.
c) On a : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -y \\ y' & = & x \end{array}\right.$
d) Tout point M de la courbe $\mathscr{C}$ a une image M' par R qui appartient ? la courbe Γ.

Exercice 4

On rappelle que $2 < \mathrm{e} < 3$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{|x|}}{\mathrm{e}^{x}+1}.$$

a) La fonction f est paire.
b) On a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
c) On a : $\displaystyle\lim_{x\to+0^-} f(x) = -\frac{3}{4}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+0^+} f(x) = \frac{1}{4}$.
d) On a :

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2+1}{2}\right).$$

Exercice 5

On rappelle que $2 < \mathrm{e} < 3$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{2x}.$$

a) La fonction f vérifie l'équation
$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad y'(x) - 2y(x) = \mathrm{e}^{2x}$.
b) L'équation $f(x) = -\dfrac{1}{16}$ deux solutions distinctes.
Pour α réel, on pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
c) Pour tout réel α, on a

$$I(\alpha) = -\frac{1}{4\mathrm{e}^2} - \frac{2\alpha+1}{4}\mathrm{e}^{2\alpha}.$$

(On pourra utiliser une intégration par parties.)

d) On a : $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} = +\infty$.

Exercice 6

On considère les fonctions définies par

$$f(x) = [2 + \cos x]\mathrm{e}^{1-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

On note G la primitive de g valant $1 + \ln 3$ en 0 et I son intervalle de définition.
a) On a : $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
b) Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $G(x) = \ln[f(x)]$.
c) La fonction G est strictement monotone sur I.
d) On a :

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left[\frac{f(1)}{f(0)}\right].$$

Exercice 7

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}.$$

et $\mathscr{D}$ son ensemble de d ?finition. On note

$$I = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et, pour} \qquad n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^2 f(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x.$$

a) Il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathscr{D}$, on ait

$$f(x) = a + \frac{b}{x+2}.$$

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} I$.
d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite $4 - \ln 2$.

Exercice 8

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = O \qquad (\mathrm{E}_1).$$

a) Les solutions de (E_1) sont les fonctions $y(x) = Ke^{\frac{x}{2}}$, où $K \in \mathbb{R}$.
b) L'équation (E_1) admet une unique solution vérifiant la condition $y(O) = 2$ et c'est la fonction $y(x) = e^{2x} + 1$.
On considère l'équation

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad u'(x) + u(x) = 2e^{-3x} \qquad (E_2)$$

c) Une fonction f vérifie l'équation (E_2) si et seulement si la fonction g définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $g(x) = e^{3x} f(x) + 1$, est solution de l'équation (E_1).
d) La fonction

$$f(x) = 2e^{-x} - e^{-3x}$$

est l'unique fonction u vérifiant l'équation (E_2) et la condition $u(0) = 1$.

Exercice 9

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 2nx + 1.$$

a) Pour tout $n \geqslant 2$, la fonction f_n est strictement décroissante sur l'intervalle [0, 1].
b) Pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
On note u_n l'unique solution dans l'intervalle $[0\,;1]$ de l'équation $f_n(x) = 0$.
c) Pour tout $n \geqslant 2$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
d) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 10

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \qquad \text{et, pour tout} \quad n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n.$$

On définit les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$v_n = u_{n+1} - u_n \qquad \text{et} \qquad w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n.$$

a) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.
b) La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.
d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite finie.

Exercice 11

Soit α un réel et (E_α) l'équation d'inconnue complexe z

$$z^2 + (1+\alpha)z + \alpha^2 = 0.$$

On désigne par M_α et M'_α, les points du plan dont les affixes sont les solutions de (E_α).
a) Le nombre complexe $z = -2 + \mathrm{i}\sqrt{5}$ est une solution de (E_α).
b) Les solutions de l'équation (E_α) sont soit réelles, soit complexes conjuguées.
c) Pour tout $\alpha > 1$, le triangle $(\mathrm{O}M_\alpha M'_\alpha)$ est isocèle.
d) Pour tout $\alpha > 1$, on a : $M_\alpha M'_\alpha = \sqrt{(3\alpha+1)(\alpha-1)}$.

Exercice 12

Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe 4 et l'application F qui, à tout point M distinct de A, d'affixe z, associe le point $M' = F(M)$, d'affixe z' donné par

$$z' = \frac{z-4}{4-\overline{z}} \qquad (1)$$

a) Le point B d'affixe 1 + 3i a pour image par F le point B′ d'affixe i.
b) Tous les points de la droite d'équation $x = 4$ privée du point A ont la même image par F.
c) Pour tout point M distinct de A, d'image M' par F, on a : $\mathrm{O}M' = 1$.
d) Pour tout nombre complexe $z \neq 4$, le nombre $\dfrac{z'-1}{z-4}$ (o ? z' est donné par (1)) est réel.

Exercice 13

Soit :
- (ABC) un triangle équilatéral de côté 3 ;
- G le centre de gravité du triangle (ABC) ;
- H le symétrique de A par rapport à G.

On pourra également considérer
- I le milieu du segment [BC].

a) Le point H est le barycentre du système de points pondérés
{(A, 1) ; (B, −2) ; (C, -2)}.
b) On a : $\overrightarrow{\mathrm{HA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HC}} = 3$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et perpendiculaire à la droite (HC).
c) Pour tout point M de $\mathscr{P}$, on a : $\overrightarrow{\mathrm{H}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HC}} = 3$.
d) Le plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}} - 2\overrightarrow{M\mathrm{B}} - 2\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{HC}} = -9.$$

Exercice 14

Soit (SMN) un triangle isocèle de sommet principal S, de cercle inscrit de centre Ω et de rayon 1.
On note Q, P, O respectivement, les points de contact du cercle inscrit avec les segments [SM], [SN] et [MN]. Enfin, on pose OS = x.

a) On a : $\dfrac{x}{\text{OM}} = \dfrac{1}{\text{QS}}$.
b) On a : $\text{QS}^2 = x(x-2)$.
c) On a : $\text{OM}^2 = \dfrac{x}{x-2}$.
On rappelle que le volume d'une section de cône est égal au tiers du volume de la section de cylindre correspondante (c'est-à-dire de même base et de même hauteur).
Soit V le volume du cône engendré par rotation du triangle (SMN) autour de l'axe (SO).
d) Le volume V est minimum pour $x = 4$.

Exercice 15

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient :
- une boule numérotée 0 ;
- une boule numérotée 1 ;
- 2^1 boules numérotées 2 ;
- 2^2 boules numérotées 3 ;

......
- 2^{k-1} boules numérotées k (où k est un entier compris entre 1 et n) ;

......
- 2^{n-1} boules numérotées n.

Les boules sont indiscernables au toucher. On extrait au hasard une boule de l'urne et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
a) L'urne contient $2^n - 1$ boules.
b) Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : $P(X = k) = 2^{n-k+1}$.
c) On a pour $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1.$$

d) On a : $\text{E}(X) = (n-1)2^n + 1$.

Exercice 16

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 2 boules blanches et n boules noires ; l'urne V contient n boules blanches et 2 boules noires.
On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire deux boules de cette urne, successivement et sans remise. On désigne par :

- U l'évènement : « on choisit l'urne U » ;
- V l'évènement : « on choisit l'urne V » ;
- B l'évènement : « les deux boules tirées sont blanches ».

a) On a : $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{U}) = \dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$.

b) On a : $p(\mathrm{B}) = \dfrac{n^2 - n + 2}{(n+2)(n+1)}$.

c) On a : $p(\mathrm{U}|\mathrm{B}) = \dfrac{2}{n^2 - n + 2}$.

d) Pour que $p(\mathrm{U}|\mathrm{B}) \leqslant 0,1$, il suffit que $n \geqslant 4$.