Concours d'entrée FESIC mai 2001

Dans toute question où il intervient le plan (respectivement l'espace) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right) = (\text{O}xy)$ (respectivement $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right) =$ $(\text{O}xyz)$).

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\text{I} =]-\infty,\ 1]$ par

$$f(x) = 2x\sqrt{1-x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. On désigne par T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 0$.

a) Pour tout $x < 1$, on a : $f'(x) = \dfrac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$.

b) Pour tout $x \in \text{I}$, on a : $f(x) \leqslant \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

c) Une équation cartésienne de T est $y = 2x$.

d) La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de T.

Exercice 2

Soit f et g les fonctions définies sur $\text{I} =]-\infty,\ 1]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) + \text{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \text{e}^{x} - (x+1).$$

a) La fonction g est positive sur I.

b) Pour tout $x \in \text{I}$, on a : $f'(x) = \dfrac{\text{e}^{-x}}{x+1}g(x)$.

c) La fonction f est bijective de I sur $]0, +\infty[$.

d) Il existe un unique réel α dans I tel que $f(\alpha) = 0$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (-x+3)\text{e}^{x},$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

a) Pour tout $x > 0$, on a : $f(x) \geqslant -x+3$.
b) La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
c) La fonction f admet un unique extremum.
d) Pour tout réel $m \neq e^2$, l'équation $f(x) = m$ admet soit 0 soit 2 solutions.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right),$$

$\mathscr{D}$ son ensemble de définition et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
a) On a : $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
b) Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a : $f(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$.
c) La courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 2x$ comme asymptote en $+\infty$.
d) La courbe $\mathscr{C}$ admet une unique tangente parallèle à l'axe $(\mathrm{O}x)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = x\sin\left(\frac{2}{x}\right).$$

a) On a : $f\left(\frac{4}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi}$.
b) On a $f(x) = 0$ si et seulement s'il existe un entier relatif non nul k tel que $x = \frac{1}{k\pi}$.
c) On a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
d) On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

Exercice 6

Pour tout couple de réels a et b tels que $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$, on définit sur $]0,\ +\infty[$ la fonction

$$f_{a,\ b}(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x}$$

et on note $\mathscr{C}_{a,\ b}$ sa courbe représentative.
a) Pour tout couple $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_{a,\ b}$.

b) Pour tout couple $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_{a,\ b}(x) = b$.
c) Il existe une unique courbe $\mathscr{C}_{a,\ b}$ passant par le point A de coordonnées $(1,\ 1)$.
d) Il n'existe pas de courbe $\mathscr{C}_{a,\ b}$ passant par le point B de coordonnées $(1,\ 0)$ et admettant en B une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.

Exercice 7

Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 \left(1 + x^n\right)\ln(1 + x)\, d\text{x}.$$

a) Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, on a : $0 \leqslant \ln(1 + x) \leqslant \ln 2$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}*$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant 2\ln 2$.
c) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
d) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 8

Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\, \mathrm{d}x.$$

a) On a : $\mathrm{I}_1 = \mathrm{e} - 1$.
b) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
c) Pour tout entier $n > 0$, on a : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
d) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0.

Exercice 9

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_1^x t\mathrm{e}^{1-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

a) La fonction F est positive pour tout x positif.
b) Pour tout x réel, on a : $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{1-x^2} - 1\right)$.
c) Pour tout x réel, on a : $F'(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2} - 1$.
d) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Exercice 10

On considère la suite $(S_n)_{n\in N^*}$ définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}.$$

a) Pour tout entier $n > 0$, on a : $S_n = \dfrac{n+1}{2n}$.
b) Pour tout entier $n > 0$, on a : $0 \leqslant S_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$.
d) La suite $(S_n)_{n\in N^*}$ est croissante.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -1 - \mathrm{e}^x.$$

a) Pour tout $x \leqslant -1$, on a : $-\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.
b) L'équation $f(x) = x$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.
On désigne par α l'unique solution négative de l'équation $f(x) = x$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n, et de premier terme $u_0 \leqslant -1$.
c) Pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant -1$.
d) Pour tout entier naturel n, on a : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}|u_0 - \alpha|$.

Exercice 12

On considère le nombre complexe

$$Z = -\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}.$$

a) On a : $|Z| = 1$.
b) On a : $Z = -(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$.
c) Le réel $-\dfrac{\mathrm{i}\pi}{12}$ est un argument de Z.
d) On a : $Z = \mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{12}}$.

Exercice 13

Si z et z' désignent deux nombres complexes, on pose

$$Z = z\overline{z'} + \overline{z}z'.$$

a) Si $z = 2\text{i}$ et $z' = -1$, alors $Z = 4\text{i}$.
b) Si $z = \text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{4}}$ et $z' = \text{e}^{\frac{3\text{i}\pi}{4}}$, alors $Z = 0$.
c) Si $z = z'$, alors $Z = 2|z|$.
d) Si z est le nombre complexe de module $r > 0$ et d'argument θ et z' est le nombre complexe de module $r' > 0$ et d'argument θ', alors
$Z = 2rr'\cos\left(\theta - \theta'\right)$.

Exercice 14

Soit α un réel appartenant l'intervalle $[0, \pi]$ et (E_α) l'équation d'inconnue complexe z

$$z^2 + 2(\sin\alpha)z + 1 = 0 \qquad (\text{E}_\alpha)$$

a) Pour tout $\alpha \in [0,\ \pi]$, l'équation (E_α) admet deux racines complexes conjuguées distinctes.
b) Il existe une unique valeur de $\alpha \in [0,\ \pi]$ pour laquelle i est solution de (E_α).
c) Pour tout $\alpha \in [0,\ \pi]$, l'équation (E_α) a pour solutions :

$$z_1 = \sin\alpha - \text{i}\cos\alpha \qquad \text{et} \qquad z_2 = \sin\alpha + \text{i}\cos\alpha.$$

d) Pour tout $\alpha \in [0,\ \pi]$, l'équation (E_α) a pour solutions

$$z_1 = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \text{e}^{\text{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Exercice 15

Soit A, B, C trois points non alignés du plan $\mathscr{P}$ et G le point défini par

$$\overrightarrow{\text{A}G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AC}}.$$

a) Le point G est le barycentre du système de points pondérés
{(A, 1) ; (B, 1) ; (C,2)}.
b) L'application $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ qui, à tout point M du plan, associe le point M' du plan défini par

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}.$$

est l'homothétie de centre G et de rapport 3.
c) Le point G est le milieu du segment [IC], où le point I est le milieu du segment [AB].
d) Si le triangle (ABC) est rectangle en A, alors $G\text{A} = G\text{C}$.

Exercice 16

Soit $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2\text{e}^t + \text{e}^{-t} \\ y & = & 2\text{e}^t - \text{e}^{-t} \end{array}\right.$$

où le paramètre t décrit $\mathbb{R}$ Soit M de coordonnées $(a\ ;\ b)$ un point de $\mathscr{C}$.
a) Le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(b,\ a)$ est un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point M.
b) Soit N le point de coordonnées $(b\ ;\ a)$ et T le point défini par
$\overrightarrow{\text{O}T} = \overrightarrow{\text{O}M} + \overrightarrow{\text{O}N}$.
Alors la droite (MT) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M.
c) La courbe $\mathscr{C}$ est contenue dans la courbe d'équation cartésienne
$x^2 - y^2 = 4$.
d) La courbe $\mathscr{C}$ n'a pas d'intersection avec l'axe $(\text{O}x)$.

Exercice 17

On considère une succession de sacs qu'on désigne par S_1, S_2, ..., S_n, ...Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc ; tous les autres sacs contiennent chacun 1 jeton noir et 1 jeton blanc.
On tire au hasard un jeton du sac S_1, que l'on place dans le sac S_2. Puis, on tire au hasard un jeton du sac S_2, que l'on place dans le sac S_3, et ainsi de suite. On note B_k l'évènement : le jeton tiré du sac S_k est blanc, et $p_k = P(B_k)$ sa probabilité.
a) On a : $P(\text{B}_2|\text{B}_1) = \dfrac{2}{3}$ et $P\left(\text{B}_2|\overline{\text{B}_1}\right) = \dfrac{1}{3}$.
b) On a, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{2}{3}$.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_n = p_n - 2$. Alors la suite $\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique.
d) La suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 18

Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6. On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci. On note

- N l'évènement : le dé tiré est normal ;
- U l'évènement : on obtient 1 au premier lancer ;
- pour n entier non nul, S_n l'évènement : on obtient 6 à chacun des n premiers lancers.

a) On a : $P(\text{U}) = \dfrac{2}{9}$.

b) Pour tout entier n non nul, on a : $P\left(S_n\right) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Pour n entier non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé truqué, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n premiers lancers.

c) Pour tout entier n non nul, on a : $p_n = \dfrac{1}{2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 1}$.

d) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$.