Concours Fesic 18 mai 2013

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1 : BASES EN ANALYSE

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

a. La dérivée de $x \longmapsto x\text{e}^x$ est $x \longmapsto \text{e}^x$.

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{x} = +\infty$.

c. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si $f' = f$, alors f est la fonction nulle.

d. Soient A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire tels que $\text{P(A)} = 0{,}2$, $\text{P(B)} = 0{,}5$ et $P(A \cup B) = 0,7$.

A et B sont incompatibles.

EXERCICE 2 : BASES EN GÉOMÉTRIE

Pour le a. et b., on se place dans le plan complexe $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ Les questions a. et b. sont indépendantes.

a. Si $z = -6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ alors $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.

b. Si M est un point d'affixe z de partie imaginaire non nulle et M′ un point d'affixe $z' = -\overline{z}$, alors M et M′ sont symétriques par rapport à O.

Pour le c. et le d., on se place dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace.

On pose (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives $4x+6y-10z+3 = 0$ et $-6x-9y+15z-8 = 0$.

Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t+1 \\ y & = & -t-3 \\ z & = & 5t-1 \end{array}\right.$ où t désigne un nombre réel.

c. (P_1) et (P_2) sont sécants.

d. Le point A(2 ; 3 ; - 5) appartient à la droite (d).

EXERCICE 3 : LECTURE GRAPHIQUE

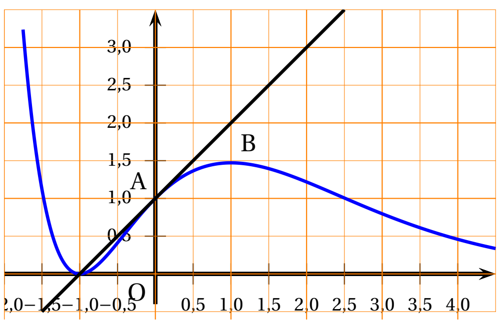
On considère la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. ainsi que la tangente à cette courbe au point A de coordonnées (0 ; 1).

a. $f'(0) = 1$.

b. $f'(1) = 1{,}5$.

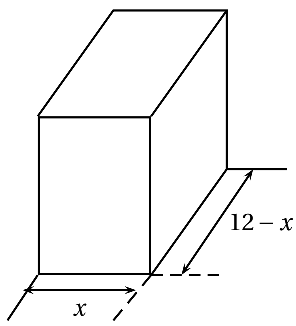
c. L'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur l'intervalle $[-1{,}5 ; 4]$.

c. $2 \leqslant \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\text{d}x \leqslant 4$.



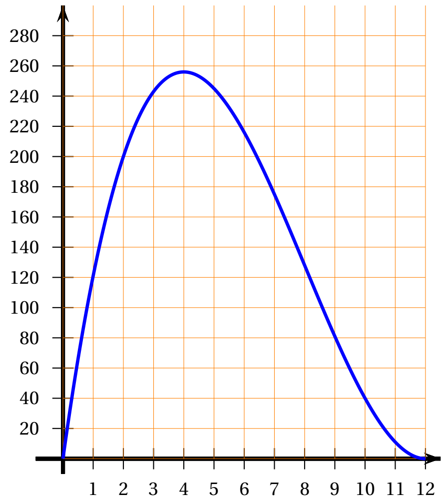
EXERCICE 4 : VOLUME D'UN PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE

On veut réaliser, dans l'angle d'un plan de travail, un placard ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour des raisons pratiques, si sa largeur est x, sa profondeur est $12 - x$ et la hauteur est égale à la profondeur.
On suppose $x \in [0\ ;\ 12]$ (les dimensions sont exprimées en dm).



a. Le volume $V(x)$ en dm^3 de ce placard est égal à $V(x) = \left(-12x + x^2\right)(x - 12)$.

On pose f la fonction définie sur $[0\,;12]$ par
$f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$
de courbe représentative (C) ci-contre.



b. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;12]$, $f'(x) > 0$.

c. $V(x) = 2f(x)$.

d. Dans le cas particulier où le parallélépipède rectangle serait un cube, son volume serait compris entre 200 et 225 dm^3.

Exercice 5 : Utilisation d'une suite dans un algorithme

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n - n) - 1$. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	n est un entier naturel.
Initialisation	u prend la valeur 1 ; i prend la valeur 0.
Traitement	Tant que $i < n$ u prend la valeur $\dfrac{1}{2}(u - i) - 1$ i prend la valeur $i + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher u.

a. Pour $n = 3$, l'algorithme nous donne le tableau suivant :

n	u	i
3	1	0
3	$-1/2$	1
3	$-7/4$	2
3	$-23/4$	3

b. Pour $n = 3$, l'algorithme calcule u_3.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + n$.

c. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2^n} + n$.

EXERCICE 6 : UTILISATION D'UN ALGORITHME AVEC LES NOMBRES COMPLEXES

On se place dans le plan complexe $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	θ, a, b, a', b' sont des nombres réels.
Traitement	a' prend la valeur $a \times \cos(\theta)$. a' prend la valeur $a' - b \times \sin(\theta)$. b' prend la valeur $a \times \sin(\theta)$. b' prend la valeur $b' + b \times \cos(\theta)$.
Sortie	Afficher a'. Afficher b'.

Pour le a. et le b. on suppose $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $a = 1$ et $b = 1$. 3

a. $a = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

b. $b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Dans toute la suite on posera M le point d'affixe $z = a + \text{i}b$ et M' le point d'affixe $z' = a' + \text{i}b'$ avec a' et b' les deux nombres obtenus dans l'algorithme précédent.

c. Si $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $a = 1$ et $b = 1$ alors $|z'|[= \sqrt{2}$.

d. Dans le cas général où $\theta \in \mathbb{R}$, $z' = \text{e}^{\text{i}\theta} z$.

EXERCICE 7 : BASES DE LOGIQUE

Pour le a. et le b. on suppose que z est un nombre complexe et Γ est un sous ensemble de $\mathbb{C}$.

a. $z \neq 0$ si et seulement si $\text{Re}(z) \neq 0$ et $\text{Im}(z) \neq 0$.

b. La contraposée de la proposition « si $z \in \Gamma$ alors $\text{Re}(z) = 0$ » est « si $\text{Re}(z) = 0$ alors $z \in \Gamma$ ».

Pour le c. et le d. on suppose que f est une fonction définie sur l'intervalle $\text{I} = [-3~;~5]$.

c. Si $f(-3) < 0$ et $f(5) > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur I.

d. Si f admet une primitive sur $\text{I} = [-3~;~5]$ alors f est continue sur I.

EXERCICE 8 : CALCULS DE LIMITES

a. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = -\infty$.

b. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

c. Si, pour tout réel x non nul, $\dfrac{x-1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant 1$, alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

d. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin(x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = 1$.

Exercice 9 : Calculs d'intégrales

a. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\text{d}x = 4 + 2\sqrt{2}$.

b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\text{d}x = \ln 2$.

c. La fonction $x \longmapsto \left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^x - 2$ est une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^x$.

d. $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}-2$.

EXERCICE 10 : NOTIONS DE BASES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

On se place dans le plan complexe $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On considère A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = -2\mathrm{i}$, B le point d'affixe $z_{\mathrm{B}} = -2$ et E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = 2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

a. L'écriture trigonométrique de $z_{\mathrm{E}} = 2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ est $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

b. E est situé sur le cercle de centre O et de rayon $R = 2$.

c. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z+2\mathrm{i}| = |2+z|$ est la médiatrice du segment [AB].

d. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $2z\overline{z} = 1$ est un cercle de rayon 2.

EXERCICE 11 : UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES EN GÉOMÉTRIE

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe $z' = 1+\dfrac{\mathrm{i}}{z}$.

a. L'image par f du point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1+\mathrm{i}$ est le point A′ d'affixe $z_{\mathrm{A'}} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Dans toute la suite, on pose $z = x+\mathrm{i}y$ avec $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z' = x'+\mathrm{i}y'$ avec x', y' réels.

b. $\mathrm{Re}(z') = x' = \dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}$.

c. $\mathrm{Im}(z') = y' = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

d. L'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que z' soit imaginaire pur est le cercle (C) de centre $\mathrm{A}\left(0\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{1}{2}$, privé du point O.

EXERCICE 12 : ÉTUDE D'UNE FONCTION LOGARITHME

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$. On note D l'ensemble de définition de f.

a. $1-x^2 > 0$ si et seulement si $-1 < x < 1$.

b. $\mathrm{D} = [-1\ ;\ 1]$.

c. La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f' définie sur D par $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

d. L'équation $f(x) = 1$ a pour solutions $x = \sqrt{\mathrm{e}-1}$ et $x = -\sqrt{\mathrm{e}-1}$.

EXERCICE 13 : ÉTUDE D'UNE FONCTION EXPONENTIELLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2+1}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

a. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c. La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f'définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2-x+1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+1\right)\right)^2}$.

d. f est croissante sur $]-\infty~;~0]$ et décroissante sur $[0~;~+\infty[$.

Exercice 14 : Bases en probabilités

On considère, dans a., deux évènements E et F d'une même expérience aléatoire.

a. $P_{\overline{F}}(E) = 1 - P_F(E)$.

Pour les questions b, c et d, nous utiliserons les hypothèses suivantes : une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. Un joueur tire au hasard une boule dans l'urne.
Si la boule est blanche, il lance un dé tétraédrique dont les faces numérotées de 1 à 4 ont la même probabilité d'apparition.
Si la boule est noire, il lance un jeton dont les faces numérotées de 1 à 2 ont la même probabilité d'apparition.
On considère les évènements suivants :
G : « Le joueur obtient le numéro 1 » ; B : « Le joueur tire une boule blanche ».

b. $P'(B \cap G) = \dfrac{5}{32}$.

c. $P(G) = \dfrac{13}{32}$.

d. $P_G(B) = \dfrac{5}{11}$.

Exercice 15 : Différentes lois de probabilités

a. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,5]$. $P\left(1 \leqslant X \leqslant \dfrac{5}{2}\right) = 0,4$.

b. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, $P(Y > c) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$.

c. Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{10}$. $P(T \leqslant 10) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

d. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu~;~\sigma^2\right)$ et vérifiant $P(0 \leqslant Z \leqslant 2) = 0,75$. La loi de Z n'est pas la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0~;~1)$.

Exercice 16 : Repérage dans l'espace

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, on considère le plan P d'équation cartésienne $x + 2y + 3z - 2 = 0$ et la droite D dont une représentation paramétrique est, pour tout réel t, $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1+2t\\ y & = & 2-t\\ z & = & -3-t \end{array}\right.$

a. Le point A$(-1~;~3~;~-2)$ appartient à D.

b. Le plan P et la droite D sont sécants au point B de coordonnées $(-3~;~4~;~-1)$.

c. La droite D$'$, de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & k\\ y & = & -2k+1\\ z & = & k \end{array}\right.$ pour tout réel k, est sécante au plan P.

d. Les droites D et D$'$ sont coplanaires.