Concours Fesic – mai 2009

Calculatrice interdite ; traiter 12 *exercices sur les* 16 *en* 2 *h ; répondre par Vrai ou Faux sans justification.*
+1 *si bonne réponse,* −1 *si mauvaise réponse,* 0 *si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.*

EXERCICE 1

Pour tout x élément de $D =]-1\ ;\ +\infty[$, on pose

$$f(x) = \ln(1+x)$$

et pour tout x réel, on pose

$$g(x) = \mathrm{e}^x - 1 \quad \text{et} \quad h(x) = g(2x) - 1.$$

1. La fonction g est la bijection réciproque de f.
2. Pour tout $x \in D$, on a :
$$h \circ f(x) = x^2 + 2x - 1.$$
3. Pour tout x réel, on a :
$$f \circ h(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right).$$
4. La fonction $f \circ h$ est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{|x| - 1}{|x| + 1}.$$

1. La fonction f est impaire.
2. Pour tout x réel, on a : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
3. On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.
4. On a : $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{f(x) + 1}{x}\right] = 2$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = -2x + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{|x|}},$$

D son ensemble de définition et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. On a : $D =]0\ ;\ +\infty[$.
2. La fonction f est impaire.

Soit Δ la droite d'équation $y = -2x$.

3. La droite Δ est asymptote à $\mathscr{C}$.
4. La courbe $\mathscr{C}$ ne coupe pas la droite Δ.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x) + 1}$$

et D son ensemble de définition.

1. On a : $D =]0\ ;\ +\infty[$.
2. La fonction f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.
3. On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.
4. Pour tout $a > 1$, l'équation $f(x) = a$ admet exactement deux solutions dans D.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie pour $x \neq -1$ par

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
2. La courbe $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse 1 une tangente de pente $\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}$.
3. La courbe $\mathscr{C}$ a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$.
4. La droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

EXERCICE 6

Soit J la fonction définie pour $x \neq 0$ par

$$f(x) = x^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{x}\right).$$

1. La fonction f est bornée.
2. Pour tout x non nul, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant x^2$.
3. On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
4. On a $f(x) = 0$ si et seulement s'il existe un entier$k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \dfrac{4}{2k+1}$.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $D =]-2\ ;\ 2[$ par

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+2)^2}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. La courbe $\mathscr{C}$ admet un centre de symétrie.
2. La fonction $f$admet la même limite lorsque x tend vers -2 par valeurs supérieures et lorsque x tend vers 2 par valeurs inférieures.
3. Pour tout $x \in D$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{4}{(x+2)^2}\right]$$

4. La fonction F définie sur D par

$$Fx) = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - \frac{1}{2(x+2)}$$

est une primitive de f sur D.

EXERCICE 8

Soit F la fonction définie sur $I =]-\infty~;~0[$ par

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour tout $x \in]-\infty~;~0[$, on a : $F(x) \geqslant 0$.
2. Il existe une constante réelle C telle que, pour tout $x \in I$,

$$F(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x - 1\right) + C.$$

3. La fonction F est croissante sur I.
4. L'équation $F(x) = 0$ n'admet aucune solution sur I.

EXERCICE 9

Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par

$$I_n = \int_0^n \ln x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$I_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^n}\right)\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^n}\right).$$

2. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est majorée par $\dfrac{1}{2}$.
3. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est décroissante.
4. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ converge vers 0.

EXERCICE 10

Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par

$$In = \int_0^n x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

1. Pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant 1$.
2. Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$I_n = \frac{1}{n^2} - \frac{n+1}{n^2}\mathrm{e}^{-2}.$$

3. On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = -\infty$.
4. On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 I_n = 1$.

EXERCICE 11

On considère les équations différentielles

$$y'' + \frac{1}{16}y = 0 \quad (E) \quad \text{et} \quad -y'' + \frac{1}{16}y = 0 \quad (E')$$

1. La seule fonction qui est à la fois solution des équations (E) et (E') est la fonction nulle.
2. Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = A\cos\left(\frac{x}{4}\right) + B\sin\left(\frac{x}{4}\right)$$

où A et B sont deux réels quelconques.

3. Les solutions de l'équation (E) sont périodiques de période 4π.
4. L'équation (E) admet une unique solution vérifiant $y(0) = \sqrt{2}$ et $y'(0) = -\sqrt{2}$, qui est la fonction g définie sur R par

$$g(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{4}\right) - \sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{4}\right).$$

EXERCICE 12

Soit n un entier naturel non nul et P_n le polynôme défini, pour tout x réel, par

$$P_n(x) = x^3 - 3nx^2 + \left(3n^2 - 1\right)x - n(n+1)(n-1).$$

1. Pour tout $n \in N^*$, $P_n(0)$ est un entier naturel.
2. Pour tout $n \in N^*$, $P_n(n) = 0$.
3. Pour tout $n \in N^*$ $P'_n(n) = 0$.
4. La suite $(P_n(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 13

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par

$$u_n = \mathrm{e} + \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e} + 1$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. On a : $\lim u_n = 0$.
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n+1)\mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}^{n+1} - 1}{\mathrm{e}^n(\mathrm{e}-1)}.$$

EXERCICE 14

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie par $z_0 = 1$ et la relation de récurrence, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$z_n = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4}}{(\sqrt{2})^n}.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le vecteur $\overrightarrow{M_kM_{k+1}}$ a pour affixe ei(k+3)1r/4

$$Z_k = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+3)\pi/4}}{(\sqrt{2})^{k+1}}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}*$, la longueur de la ligne polygonale $(M_0M_1M_2\ldots M_n)$ est

$$L_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(1 - 2^{-n/2}\right).$$

4. La longueur de la ligne polygonale $(M_0M_1M_2\ldots M_n)$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 15

Pour t réel, on note $M(t)$ le point dont l'affixe est le nombre complexe

$$Z(t) = \frac{1}{2+\mathrm{i}t}.$$

1. Pour tout t réel, on a :

$$Z(t) + \overline{Z(t)} = 4Z(t)\overline{Z(t)}.$$

Soit C le cercle de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1}{4}$ et de rayon $R = 4$.

2. Pour tout t réel, le point $M(t)$ appartient au cercle C.
3. Pour tout t réel non nul, les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont diamétralement opposés sur le cercle C.
4. Les points $M(1)$, $M(2)$, $M(-4)$ et $M(-2)$ sont les sommets d'un rectangle.

EXERCICE 16

Pour tout nombre complexe z, on pose

$$P(z) = z^4 - 16z^3 + 90z^2 - 16z + 89.$$

1. On a pour tout z complexe :

$$P(z) = \left(z^2+1\right)\left(z^2 - 16z + 89\right).$$

2. L'équation $P(z) = 0$ admet quatre racines complexes deux à deux conjuguées.
3. Parmi les racines de l'équation $P(z) = 0$, il y en a deux qui sont opposées.
4. Le nombre complexe $z_0 = -8 + 5\mathrm{i}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE 17

Soit A, B, C trois points distincts non alignés du plan et $x \in \mathbb{R}$. On définit les points M et N par

$$\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-x)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{A}N} = (1-x)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

1. Pour $x = 3$, M est le barycentre du système pondéré $\left\{\left(\mathrm{B},\ \frac{1}{2}\right),\ (\mathrm{C},\ -2)\right\}$.
2. Pour $x = \frac{1}{2}$, il existe deux réels b et c tels que M soit le barycentre du système pondéré $\{(B,\ b), (C,\ c)\}$.
3. Pour toute valeur de x, le point N appartient à la droite (BC).
4. Il existe une valeur de x pour laquelle (BCNM) est un parallélogramme.

EXERCICE 18

Soit, dans l'espace, les points suivants, de coordonnées respectives :

$$\mathrm{A}\ (1\ ;\ -2\ ;\ 4) ; \mathrm{B}(-2\ ;\ -6\ ;\ 5) ; \mathrm{C}(5\ ;\ 1\ ;\ 2) ; \mathrm{D}(1\ ;\ -5\ ;\ -8) ; \mathrm{E}(-4\ ;\ 0\ ;\ -3).$$

1. Une équation du plan (ABC) est : $5x - 2y + 7z - 37 = 0$.
2. La droite (AE) est orthogonale au plan (ABC).
3. Les plans (ABC) et (ADE) sont perpendiculaires.
4. L'aire du triangle (ABC) est $\sqrt{39}$.

EXERCICE 19

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire prenant les valeurs entières 0 ; 1 ; 2 ; … ; n ; $n+1$ et vérifiant, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \qquad (1)$$

1. On a : $P(X \geqslant 2) = p(X = 1)$.
2. On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$.
3. On a : $P(X = n) = P(X = n+1)$.
4. On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} [P(X \geqslant n)] = 1$.

EXERCICE 20

On s'intéresse aux timbres postaux à 2 F : 80 % d'entre eux comportent deux bandes de phosphore, l'une à gauche et l'autre à droite ; les 20 % restants ont une seule bande de phosphore, 10 % parmi ceux-ci à gauche et les autres à droite.

1. La probabilité pour qu'un timbre à 2 F (choisi au hasard) ait une bande de phosphore à droite est $p_1 = 0,98$.
2. Une machine détecte sur un timbre à 2 F une bande de phosphore à droite. La probabilité pour que le timbre ait deux bandes de phosphore est $p_2 = \dfrac{4}{49}$.

Sur une enveloppe, on a collé trois timbres à 2 F, choisis au hasard et de manière indépendante.

3. La probabilité d'avoir sur l'enveloppe un total de 5 bandes de phosphore est $p_3 = 0,128$.
4. La probabilité d'avoir sur l'enveloppe au moins 5 bandes de phosphore est égale à la probabilité d'en avoir au plus 4.