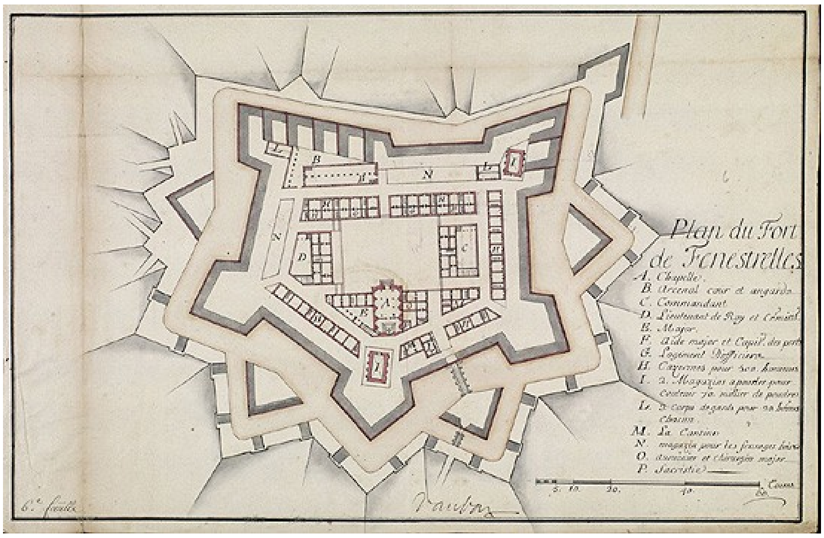
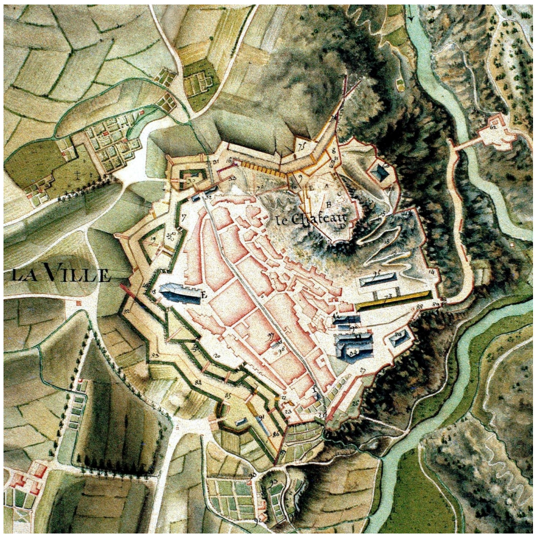




Quelle forme et quelles dimensions donner à une fortification pour la rendre imprenable ?

Par BERNARD Valentin, DOVETTA Benjamin, HUGEUX François et LETOWSKI Bastien élèves de l'atelier MATH en JEAN'S du lycée d'Altitude de Briançon

Notre travail de recherche a consisté à réfléchir à la forme et aux dimensions que l'on doit donner à une fortification pour qu'elle soit défendue au mieux.

Nous nous sommes placés à l'époque de Vauban (1633-1707) et nous supposons que notre fortification doit être construite sur terrain plat.

NOTRE CAHIER DES CHARGES

Avant de voir comment modéliser mathématiquement notre problème, il est bon de définir quelques termes.
Nous appelons ***fortification*** un ensemble fermé de murs (sans épaisseur).

Être ***défendue au mieux*** signifie que la défense de la fortification doit se faire avec un minimum de soldats (un soldat est assimilé à un point dans la suite de l'exposé) et que toutes les parties de la forteresse sont défendables par un soldat au moins.

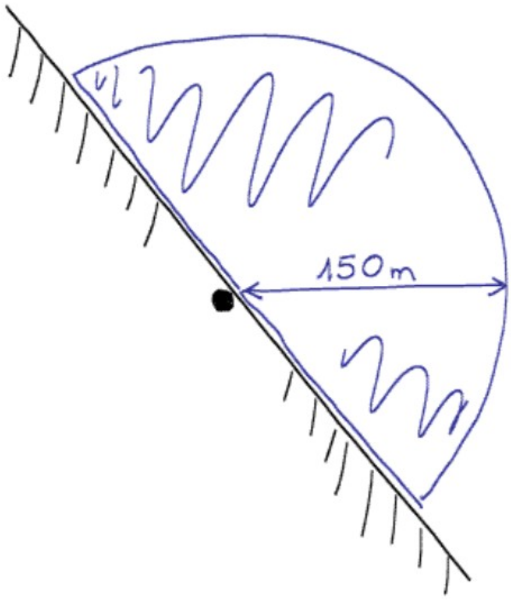
Nous rappelons que nous nous plaçons sur terrain plat et que nous n'avons pas étudié la hauteur des fortifications.
Nous sommes aussi partis de l'hypothèse selon laquelle la défense s'effectuait uniquement avec des mousquets. Les canons, qui servaient à maintenir l'ennemi loin des fortifications, n'entrent pas en ligne de compte dans notre réflexion.

- poster le minimum de soldats sur les remparts.

- une portée des mousquets de 150 m.

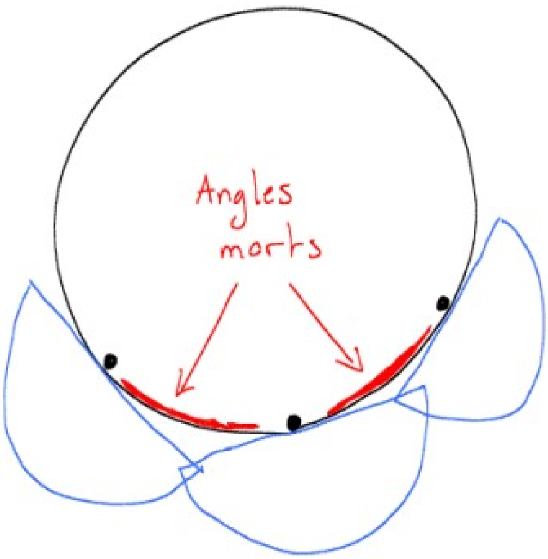
- un soldat ne peut pas défendre le mur sur lequel il est posté.

- l'ensemble des murs de la forteresse doivent être couverts par au moins un soldat.

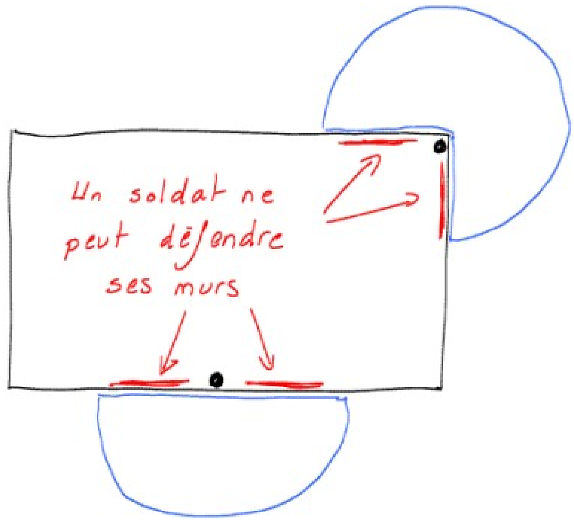


LES PREMIERS ESSAIS

Fortification ronde :



Fortification carrée :

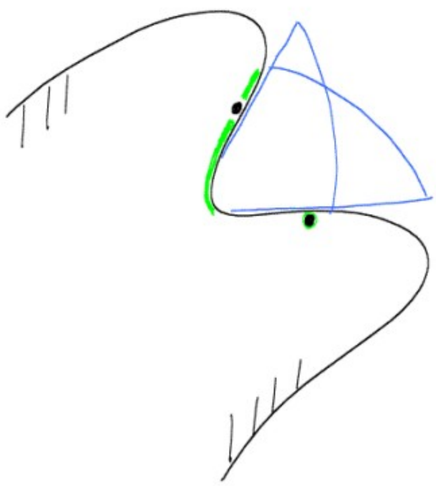


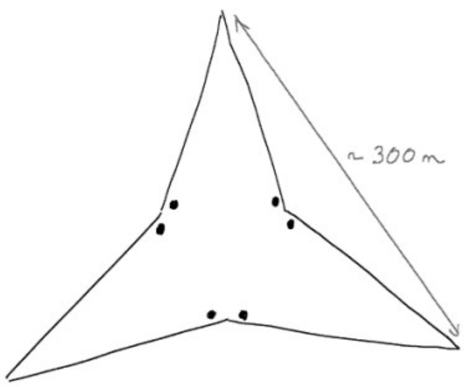
On peut se demander s'il existe une forme de fortification qui va permettre de « surveiller » une partie de mur.

Pour répondre à cette question, il faut envisager des formes non convexes de manière à ce que les soldats se trouvent face à face afin de pouvoir se défendre mutuellement.

(Convexe : un ensemble est dit convexe si, en prenant deux points quelconques de cet ensemble, le segment reliant ces deux points est entièrement compris à l'intérieur de cet ensemble)

Fortification non convexe ->

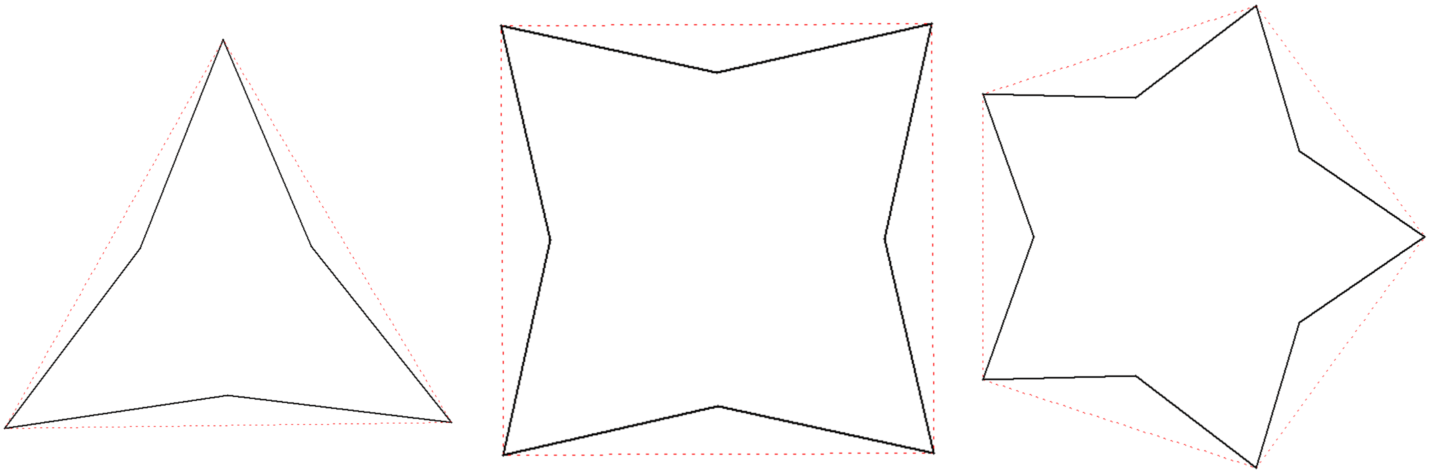




En réalité, pour éviter les angles morts et pour faciliter la construction, on peut comprendre que les murs de la fortification doivent être des segments, et non des courbes.

On arrive ainsi à une fortification en forme d'étoile.

A ce stade de nos recherches, nous pouvons proposer les formes de fortification suivantes :

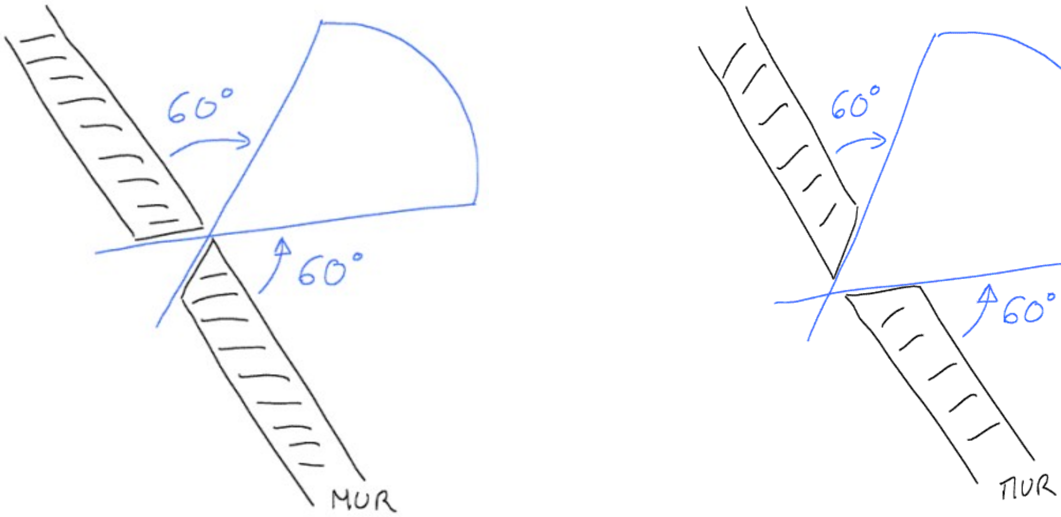


Il s'agit de polygones réguliers, avec plus ou moins de côtés selon la taille souhaitée de la fortification. Leurs côtés sont brisés et rentrés légèrement vers l'intérieur.
Les soldats (à raison de 2 par côté du polygone) sont placés très près de la pointe intérieure afin que chaque côté du polygone ait une taille optimale.

Les inconvénients de cette forme de fortification :
En théorie elle est très bien (et simple), en pratique elle a deux inconvénients:
- la surveillance des murs est laissée à une seule personne (contrainte d'économie du nombre de soldats).
- les défenseurs étant très proches, ils peuvent se nuire.

MODIFICATIONS ET RAJOUT DE CONTRAINTES

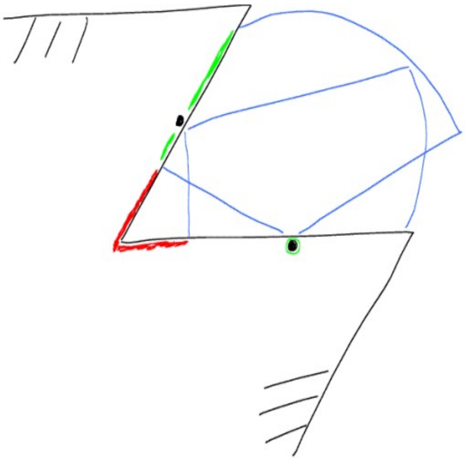
Nous avons supprimé la contrainte « poster le minimum de soldats sur les remparts », au profit d'une nouvelle contrainte : « confier la surveillance d'un même mur à plusieurs soldats ».

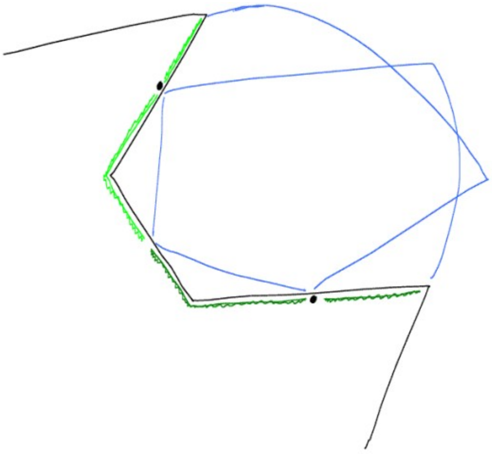


Nous avons aussi ajouté la contrainte des meurtrières, à savoir: « l'angle de tir du soldat – initialement de 180° – est réduit de 60° de chaque côté ».

NOUVELLE ETUDE

Cette dernière contrainte, liée à la présence de meurtrières, invalide les formes précédentes dans la mesure où elle crée des angles morts, donc des parties de rempart non surveillées.

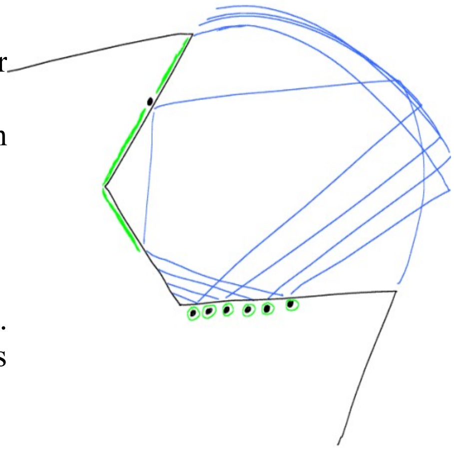




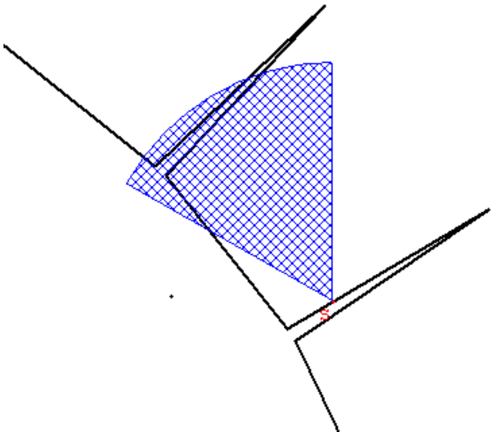
Une manière de faire disparaître ces zones non couvertes par les tirs des soldats est de supprimer les pointes, ce qui donne le schéma ci-contre.

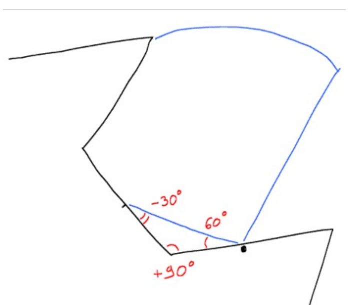
Nous avons choisi d'appeler « bastion » la partie de la fortification formant une pointe vers l'extérieur. Dans cette nouvelle configuration, un soldat posté sur un bastion doit pouvoir être en mesure de défendre à la fois le bastion situé en face du sien et la moitié du mur « de fond », la courtine.

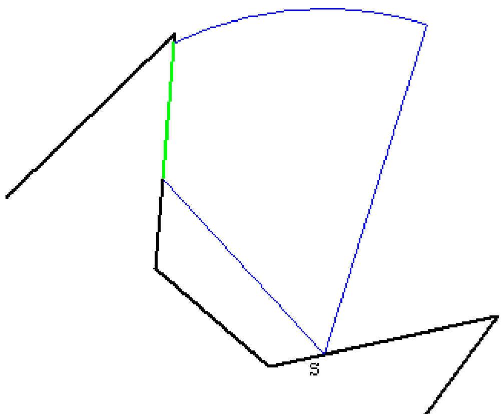
Cette dernière forme permet par ailleurs de respecter la contrainte : « confier la surveillance d'un même mur à plusieurs soldats ».
En effet on peut envisager que tous les soldats disposés sur le bastion puissent surveiller la moitié de la courtine et le bastion qui leur fait face.



Jusqu'à présent nous avons travaillé sur des schémas réalisés à main levée. Quand nous avons reproduit proprement sur ordinateur les mêmes dessins nous nous sommes rendu compte d'un problème.

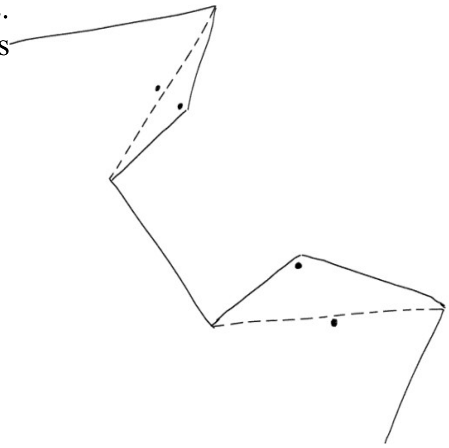




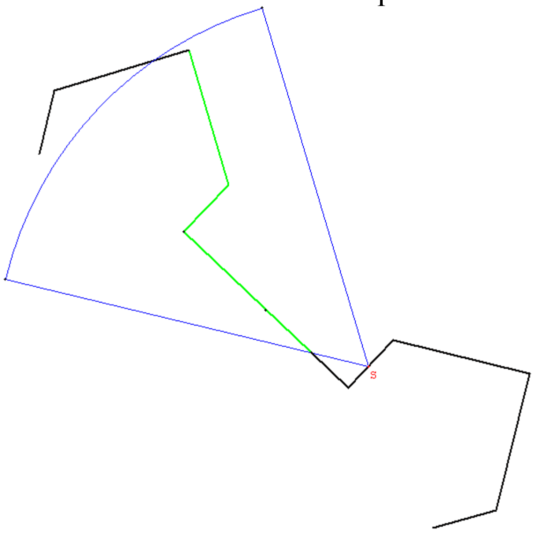


L'angle de tir (de la meurtrière) est de 60°, l'angle entre la courtine et le bastion doit largement dépasser 90° pour que le bastion ne soit pas réduit à un trait. Vu que la somme des angles dans un triangle est de 180°, il nous reste (bien) moins de 30° d'angle au milieu de la courtine (voir schéma ci-dessus).
C'est très insuffisant pour pouvoir réaliser la fortification.

Pour corriger ce gros problème, il suffit de briser les flancs des bastions. Ainsi nous avons un angle de 90° entre la courtine et le bastion et nous avons le même principe de surveillance que précédemment.

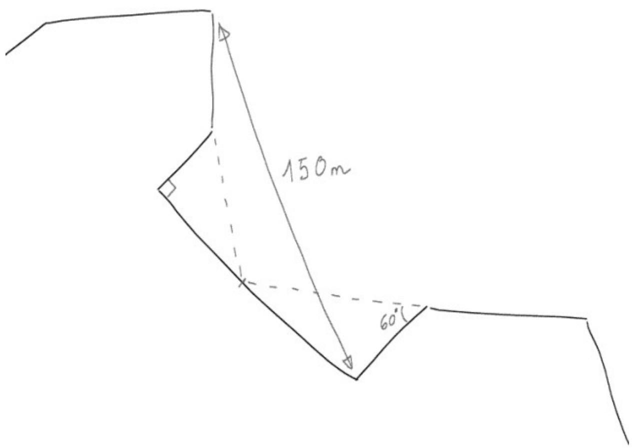


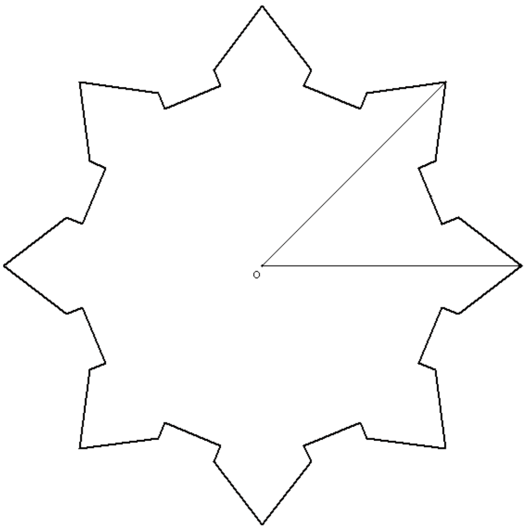
Un bastion est alors muni de quatre côtés.

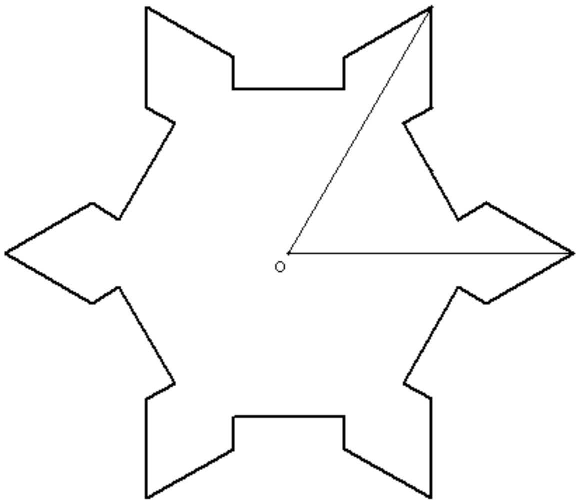


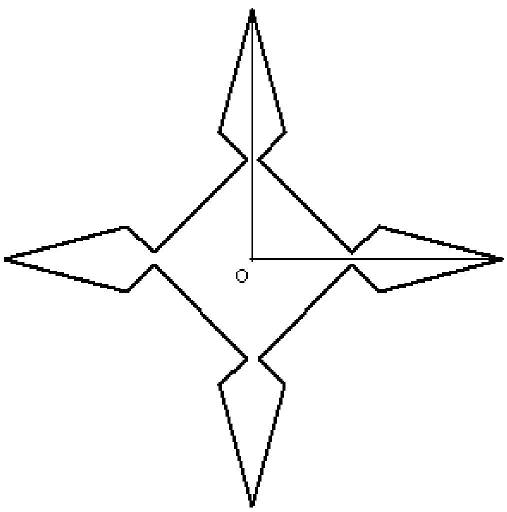
FORME

Ainsi, nous obtenons la forme suivante avec les contraintes :
Par rotation, on arrive aux formes suivantes :









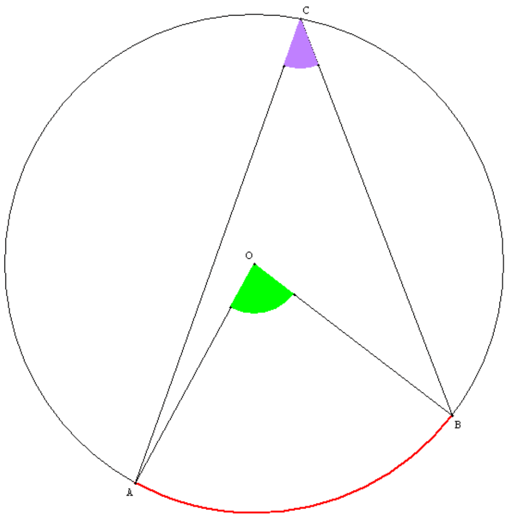
RÉALISATION ET DIMENSIONS

Maintenant que nous avons arrêté une forme de fortification, nous allons voir comment la réaliser, si c'est possible et quelles dimensions on obtient.

Pour cela nous souhaitons faire quelques rappels mathématiques.

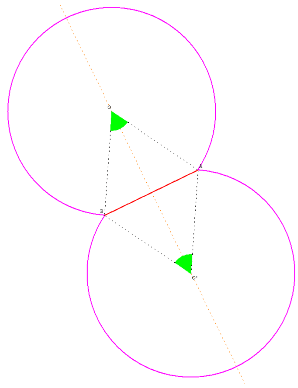
Théorème de l'angle au centre :

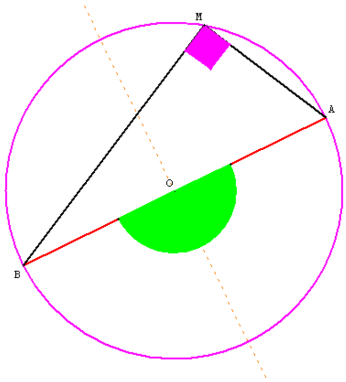
Dans un cercle, l'angle au centre qui intercepte l'arc AB vaut le double de l'angle inscrit qui intercepte ce même arc AB.



L'angle vert est le double de l'angle mauve.

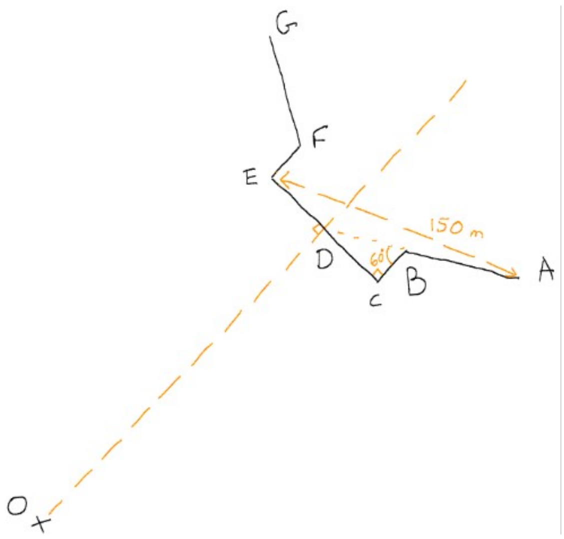
Conséquences:
L'ensemble des points qui « voient » le segment [AB] sous un certain angle (par exemple 30°) forme deux arcs de cercle.





L'ensemble des triangles rectangles d'hypoténuse [AB] forme un cercle de diamètre [AB]

Nous rappelons que nous cherchons à réaliser la structure suivante avec ses contraintes. Nous avons nommé les points A, B, C, D, E et F comme sur le schéma.



A et G sont les sommets de deux bastions consécutifs. D est le milieu de la courtine [EC]

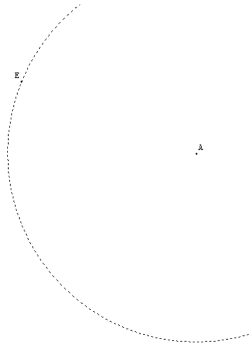
Nous avons aussi O le centre de la forteresse.
Les points E, F et G sont les symétriques de C, B et A par rapport à (OD).
Une fois la forme ABCDEFG construite, par rotation d'angle AOG on obtient toute la fortification.

CONSTRUCTION

1ère étape:

On place un point O (centre de notre fortification) et un point A. Toute notre fortification sera contenue dans le cercle de centre O et de rayon OA.

On trace un cercle de centre A et de rayon 150 m. Sur ce cercle on place E au « hasard » c'est-à-dire sans contrainte particulière.

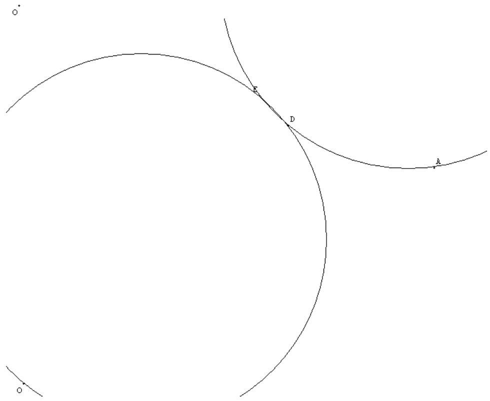


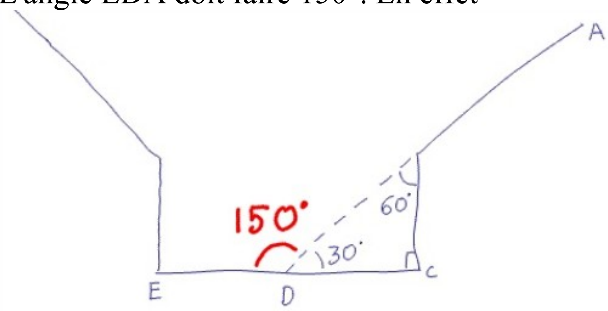
2ème étape:

Pour placer D, il faut vérifier deux contraintes:

L'angle EDO doit être droit. D'après le rappel mathématique, cela impose à D d'être sur le cercle de diamètre [OE]

L'angle EDA doit faire 150°. En effet

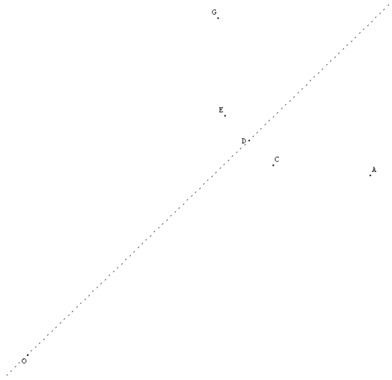




Cette dernière contrainte se traduit géométriquement (toujours d'après le rappel mathématique) par le fait que D doit être sur un arc de cercle passant par A et E et de centre O' tel que AO'E=300°.

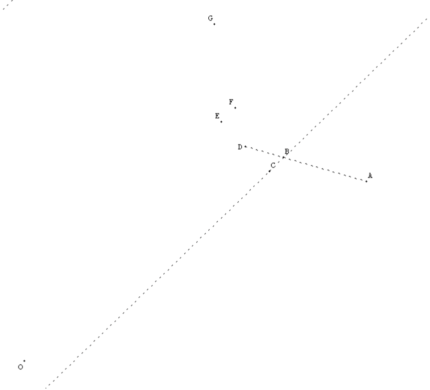
3ème étape:

On place « facilement » les points C et G, en construisant les symétriques de E et G par rapport à (OD).

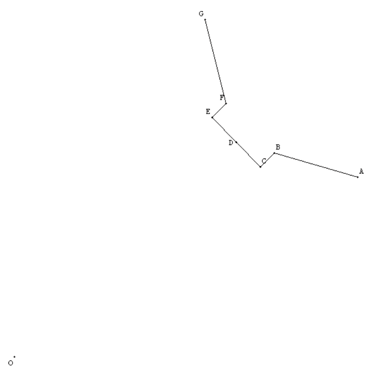


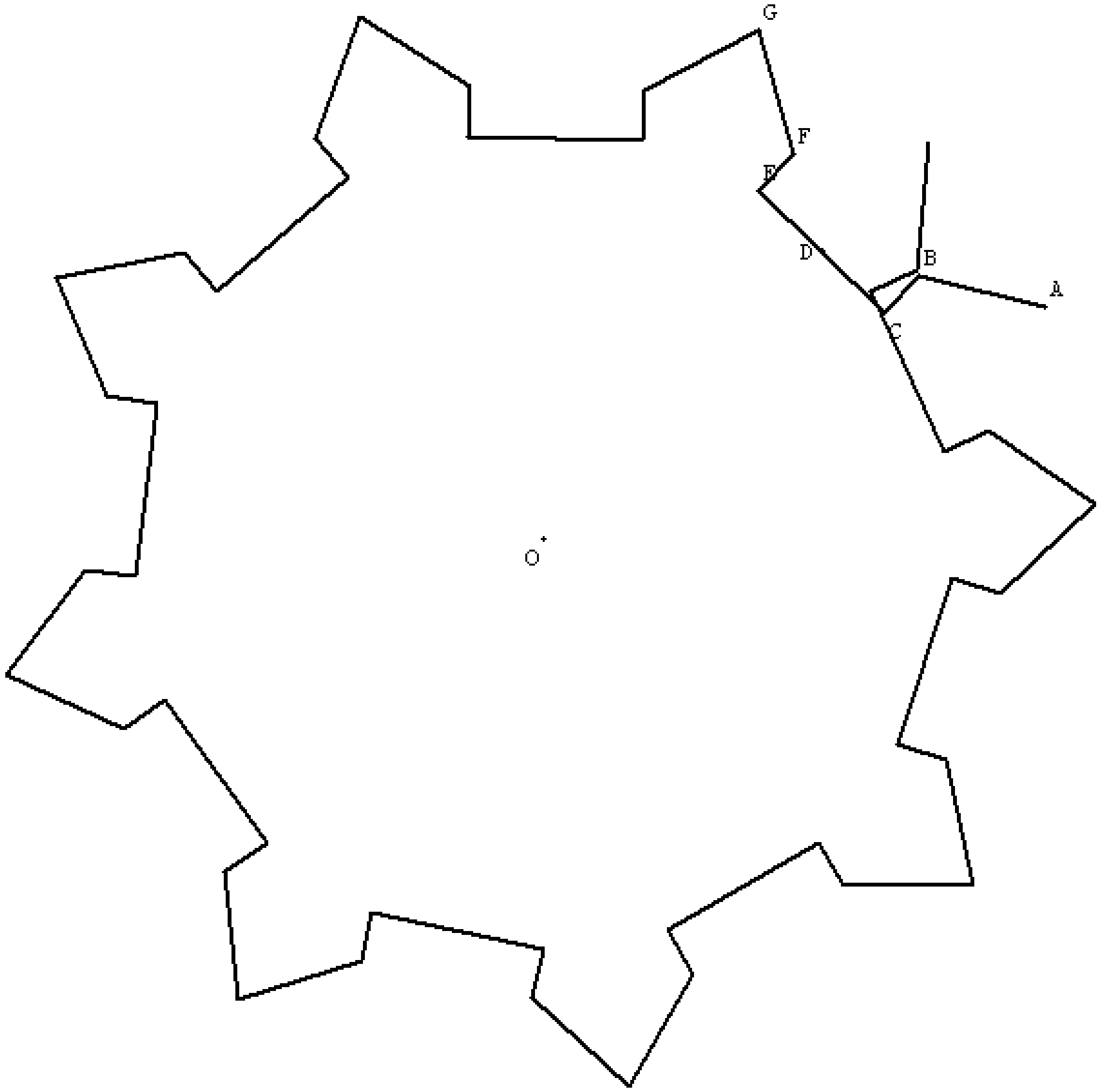
4ème étape:

On place le point B en prenant l'intersection de (DA) avec la perpendiculaire à (EC) passant par C. Le point F est le symétrique de B par rapport à l'axe (OD).



Notre structure de base est alors ABCDEFG, il ne nous reste plus qu'à la faire tourner par la rotation de centre O et d'angle AOG.

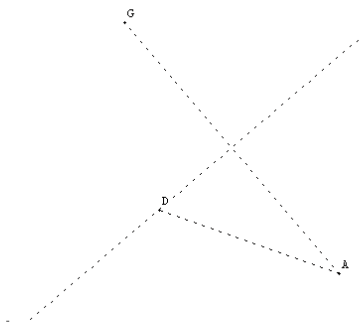




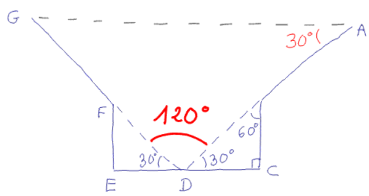
Et là apparaît un nouveau problème. Dans notre construction, l'angle AOG n'est pas forcément un diviseur de 360°. Donc en effectuant la rotation de la structure rien ne dit qu'on boucle.

Pour résoudre ce problème il faut trouver une autre méthode de construction : on part avec 3 points A, O et G sur un cercle de centre O et de rayon OG avec A est sur le cercle (l'angle $\widehat{AOG}$ doit être un diviseur de 360°).

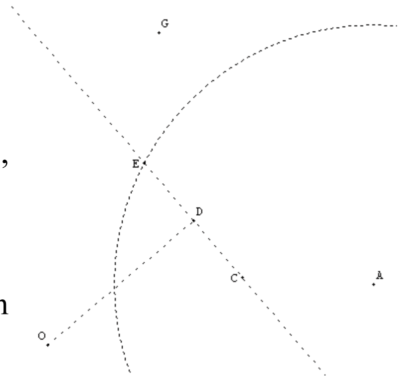
Par exemple on va partir avec un angle $\widehat{AOG}$ de 60°.



1ère étape:
On cherche à placer le point D , il doit vérifier 2 contraintes :
- Il est sur la bissectrice de $\widehat{AOG}$ (car (OD) est un axe de symétrie)
- L'angle $\widehat{ADG}$ doit faire 120°



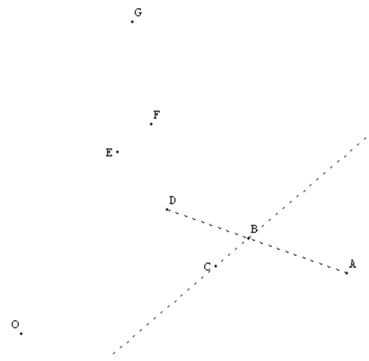
Par symétrie le triangle ADG doit être isocèle en D : comme $\widehat{ADG}$ vaut 120°, l'angle $\widehat{GAD}$ fera 30°



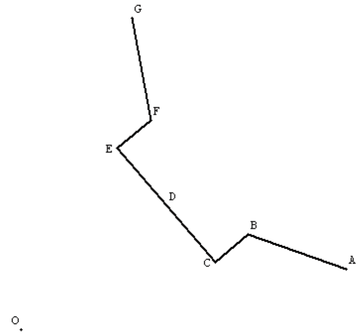
2ème étape:
On cherche à construire le point E: on trace le cercle de centre A et de rayon 150m puis on trace la perpendiculaire à (OD) passant par D

L'intersection de cette perpendiculaire avec le cercle donnera le point E et C est le symétrique de E par rapport à (OD).

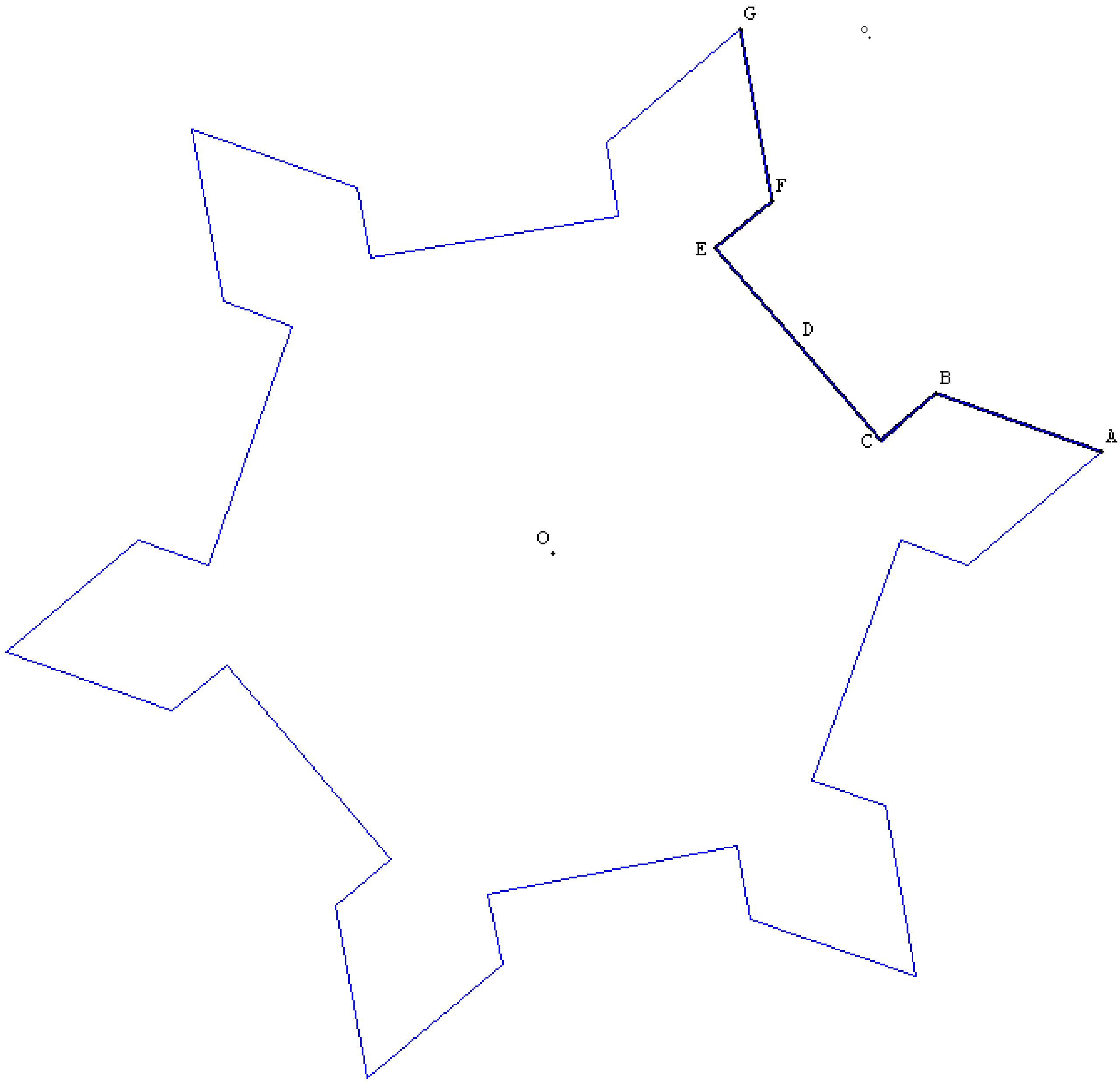
3ème étape :
On trace la perpendiculaire à (DE) passant par C et le segment [AD].
L'intersection de ces deux droites donne le point B, F est son symétrique par rapport à l'axe (OD).



4ème étape :



On effectue une rotation de centre O de la figure pour obtenir la forteresse.



59 établissements (école, collèges, lycées, universités, MJC) réparties dans toute la France soit plus de **700 personnes** (élèves, enseignants, chercheurs) qui se sont réunies à l'Université de Cergy-Pontoise pour le 18ème congrès MATh en JEAN'S

Collège André Malraux (Louvres)
Collège François Mauriac (Louvres)
Lycée Fragonard (L'isle Adam)
Lycée Jacques Prévert (Taverny)

Lycée Sainte Marie (Antony)
Collège Victor Hugo (Aulnay)
Lycée Louise Michel (Bobigny)
MJC Daniel André (Drancy)
Collège Paul Langevin (Drancy)
Collège Charcot (Joinville le pont)
Lycée François Mansard (La Varenne St Hilaire)
Lycée Hector Berlioz (Vincennes)
Lycée Jean Jaures (Montreuil)
Ecole Jean-Baptiste de la Salle (St Denis)
Lycée Marcelin Berthelot (St Maur des Fossés)

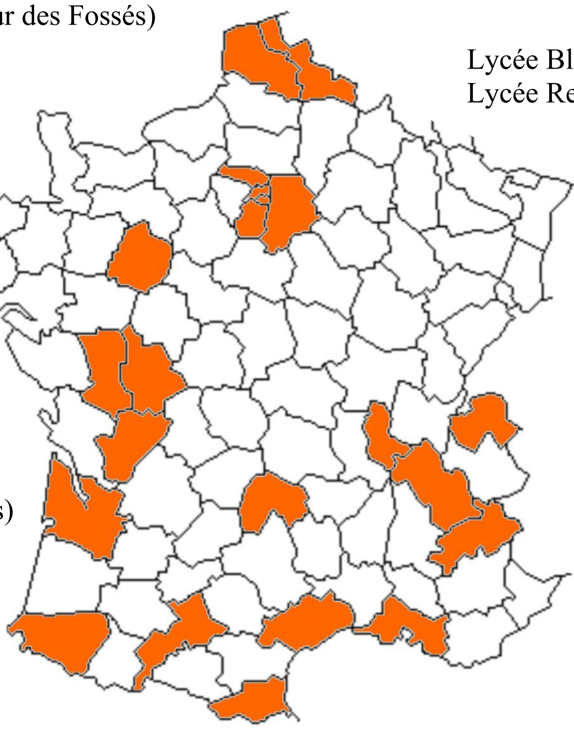
Collège Adulphe Delegorgue
(Courcelles les Lens)

Collège Jean Jaurès (Lomme)
Collège Rabelais (Mons en Baroeul)
Collège Blaise Pascal (Roubaix)

Collège Condorcet
(Pontault-Combault)

Collège Vieux Chêne
(La Fleche)
Collège Vieux Colombier
(Le Mans)

Lycée Blaise Pascal (Orsay)
Lycée René Cassin (Arpajon)



Lycée Saint Joseph
(Bressuire)
Lycée Le Bois d'Amour
(Poitiers)
Lycée de l'Image et du Son
(Angoulême)
Collège Georges Brassens (Ydes)

Collège Paul Emile Victor
(Cranves Sales)
Lycée Jean Monnet
(Annemasse)
Cité scolaire Frison Roche
(Chamonix)
Lycée de Vienne
(St Romain en Gal)
Collège Le Chamandier (Gières)
Collège-Lycée élitaire pour tous
(Grenoble)
Lycée Pierre Béghin (Moirans)
Lycée Pierre du Terrail
(Pontcharra)
Lycée d'Altitude
(Briançon)
Université de Luminy
(Marseille)

Lycée Jaufré Rudel (Blaye)
Lycée Philippe Cousteau
(St André de Cubzac)
Lycée Montaigne (Bordeaux)
Lycée Sud Médoc
(Le Taillan Médoc)
Lycée Condorcet (Bordeaux)
Lycée Kastler (Talence)
Lycée François Magendie
(Bordeaux)
Lycée Gustave Eiffel (Bordeaux)
Collège Cantelande (Cestas)
Collège Les Eyquems (Mérignac)
Lycée des Graves (Gradignan)
Lycée Elie Faure (Lormont)
Lycée Pape Clément (Pessac)
Collège Victor Louis (Talence)

Lycée Louis de Foix
(Bayonne)

Lycée Jean Moulin
(Pézenas)

Lycée Maillol (Perpignan)

IUT de Blagnac (Blagnac)
Lycée d'Auzeville
(Castanet Tolosan)
Lycée Pierre d'Aragon (Muret)
Lycée Pierre Paul Riquet
(St Orens)