UNIVERSITÉ DE CAEN BASSE - NORMANDIE

IREM DE BASSE-NORMANDIE

CAMPUS II - SCIENCES 3 - B.P. 5186

Bd Maréchal Juin, 14032 CAEN cedex

Tél. : 02 31 56 74 02 - Fax. : 02 31 56 74 90

Adresse électronique : irem@math.unicaen.fr

Site Internet : http://www.math.unicaen.fr/irem/

Journée de la Régionale APMEP de Basse Normandie,
Mercredi 5 mars 2008.
Lycée Le Robillard, Saint Pierre sur Dives.

DU CALCUL DANS LES JEUX DE HASARD (1657) de Christiaan Huygens :

le premier traité de calcul du hasard

Didier TROTOUX

Portrait de Christiaan Huygens

TABLE DES MATIÈRES

Christiaan HUYGENS : *Du Calcul dans les jeux de hasard*

La préface ………………………………………………………......... **1**

Les fondements ..……………………………………………….......... **5**

La Proposition XIV …..................……………………………….... **10**

Les cinq exercices ...…………………………………………………. **12**

Pierre Rémond de MONTMORT : *Essay d'Analyse sur les jeux de Hazard*

Proposition XXXII sur le problème 1 de Huygens ....……………..... **14**

La solution du problème 1 par Montmort …..………...……….... **15**

Jacques BERNOULLI : *L'art de conjecturer*

Remarques sur les propositions III, XII, XIV
et le problème 1 de Huygens ...……………………………......... **16**

Les remarques de Bernoulli et sa solution du problème 1 ….…..... **20**

BIBLIOGRAPHIE ……..……………………………………………. **23**

CHRISTIAAN HUYGENS

DU CALCUL DANS LES JEUX DE HASARD

A Monsieur
FRANCISCUS van SCHOOTEN.

Monsieur,

Sachant qu'en publiant les louables fruits de votre intelligence et de votre zèle, vous vous proposez entre autres de faire voir, par la diversité des sujets traités, la grandeur du champ sur lequel notre excellent Art *Algébrique* s'étend, je ne doute pas que le présent écrit au sujet du Calcul dans les Jeux de hasard ne puisse vous servir à atteindre ce but. En effet, plus il semble difficile de déterminer par la raison ce qui est incertain et soumis au hasard, plus la science qui parvient à ce résultat paraîtra admirable. Comme c'est donc à votre demande et à la suite de vos exhortations que j'ai commencé à mettre ce Calcul par écrit, et que vous le jugez digne de paraître ensemble avec les résultats de vos profondes recherches, non seulement je vous donne volontiers la permission de le publier de cette façon mais encore j'estime que cette manière de publication sera tout à mon avantage. Car si quelques lecteurs pourraient bien s'imaginer que j'ai travaillé sur des sujets de faible importance, ils ne condamneront néanmoins pas comme complètement inutile et indigne de toute louange ce que vous voulez bien adopter de cette façon comme si c'était votre propre ouvrage, après l'avoir traduit, non sans quelque labeur, de notre langue en Latin. Toutefois je veux croire qu'en considérant ces choses plus attentivement, le lecteur apercevra bientôt qu'il ne s'agit pas ici d'un simple jeu d'esprit, mais qu'on y jette les fondements d'une spéculation fort intéressante et profonde. Les Problèmes appartenant à cette Matière ne seront pas, me semble-t-il, jugés plus faciles que ceux de *Diophante*, mais on les trouvera peut-être plus amusants attendu qu'ils renferment quelque chose de plus que de simples propriétés des nombres. Il faut savoir d'ailleurs qu'il y a déjà un certain temps que quelques uns des plus Célèbres Mathématiciens de toute la France se sont occupés de ce genre de Calcul, afin que personne ne m'attribue l'honneur de la première Invention qui ne m'appartient pas. Mais ces savants, quoiqu'ils se missent à l'épreuve en se proposant beaucoup de questions difficiles à résoudre, ont cependant caché leurs méthodes. J'ai donc dû examiner et approfondir moi-même toute cette matière à commencer par les éléments, et il m'est impossible pour la raison que je viens de mentionner d'affirmer que nous sommes partis d'un même premier principe. Mais pour ce qui est du résultat, j'ai constaté en bien des cas que mes solutions ne diffèrent nullement des leurs. Vous trouverez qu'à la fin de ce Traité j'ai proposé encore quelques questions du même genre sans indiquer la manière de les résoudre, premièrement parce que je voyais qu'il me coûterait trop de travail d'exposer convenablement les raisonnements conduisant aux réponses, et en second lieu parce qu'il me semblait utile de laisser quelque chose à chercher à nos lecteurs (s'il s'en trouve quelques-uns), afin que cela leur servit d'exercice et de passe-temps.

La Haye
le 27 Avril
1657.

Votre serviteur dévoué

CHR. HUYGENS de ZUYLICHEM.

[PRÉFACE]

Quoique dans les jeux de hasard pur les résultats soient incertains, la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a cependant une valeur déterminée. Exemple : si quelqu'un parie de jeter avec un dé six points au premier coup, il est incertain s'il gagnera ou s'il perdra ; mais ce qui est déterminé et calculable c'est combien la chance qu'il a de perdre son pari surpasse celle qu'il a de le gagner. De même, si je joue avec une autre personne à qui gagnera le premier trois parties et que j'en ai déjà gagné une, il est encore incertain lequel des deux l'emportera ; mais on peut calculer avec certitude le rapport de ma chance de gagner à la sienne, et l'on sait par conséquent aussi de combien, si nous voulons interrompre le jeu, la part de l'enjeu à laquelle j'ai droit surpasse la sienne. On peut calculer également pour quel prix je devrais raisonnablement céder mon jeu à quelqu'un qui désirerait le continuer en mon lieu. Bien des questions de ce genre peuvent se présenter en des cas semblables où il y a 2, 3 ou plusieurs personnes, et comme ces calculs ne sont pas universellement connus et peuvent souvent être utiles, j'en indiquerai brièvement la méthode, après quoi je considérerai aussi le jeu aux dés.

Dans ces deux matières, je pars de l'hypothèse que dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable, c'est-à-dire par un jeu qui ne vise au détriment de personne. Exemple : si quelqu'un cache à mon insu trois écus dans une main et sept dans l'autre, et me donne à choisir entre les deux mains, je dis que cette offre a pour moi la même valeur que si j'étais certain d'obtenir cinq écus ; en effet, lorsque je possède cinq écus, je puis de nouveau me mettre dans le cas d'avoir des chances égales d'obtenir trois ou sept écus, et cela dans un jeu équitable, comme cela sera démontré plus bas.

PROPOSITION I.

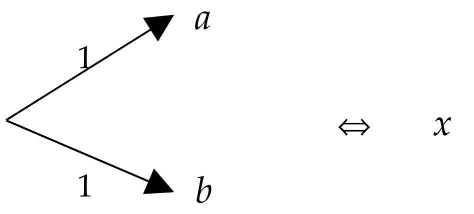
Avoir des chances égales d'obtenir a ou b me vaut $\frac{a+b}{2}$.

Afin de non seulement démontrer cette règle mais aussi de la découvrir, appelons x la valeur de ma chance. Il faut donc que, possédant x, je puisse me procurer de nouveau la même chance par un jeu équitable. Supposons que ce jeu soit le suivant. Je joue x contre une autre personne, dont l'enjeu est également x ; il est convenu que celui qui gagne donnera a à celui qui perd. Ce jeu est équitable, et il appert que j'ai ainsi une chance égale d'avoir a en perdant, ou $2x - a$ en gagnant le jeu ; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $2x$, duquel je dois donner a à l'autre joueur. Si $2x - a$ était égal à b, j'aurais donc une chance égale d'avoir a ou d'avoir b. Je pose donc $2x - a = b$, d'où je tire la valeur de ma chance $x = \frac{a+b}{2}$. La preuve en est aisée. En effet, possédant $\frac{a+b}{2}$, je puis hasarder cette somme contre un autre joueur qui mettra également $\frac{a+b}{2}$, et convenir avec lui que le gagnant donnera a à l'autre. J'aurais de sorte une chance égale d'avoir a si je perds, ou b si je gagne ; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $a + b$ et je lui en donne a.

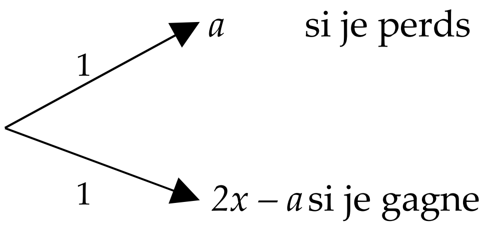
En chiffres. Lorsque j'ai une chance égale d'avoir 3 ou d'avoir 7, la valeur de ma chance est 5 d'après cette Proposition ; et il est certain qu'ayant 5 je puis me procurer de nouveau la même chance. En effet, si je joue 5 contre une autre personne dont la mise est également 5, à condition que le gagnant donnera 3 à l'autre, c'est là un jeu équitable, et il est évident que j'ai la même chance d'avoir 3 en perdant, ou d'avoir 7 en gagnant ; car en ce cas j'obtiens 10, dont je lui en donne 3.

Suivons ainsi la démarche dans la première proposition dont l'énoncé est : « Avoir des chances égales d'obtenir a ou b me vaut $\frac{a+b}{2}$ ».

La situation de jeu peut s'illustrer ainsi :

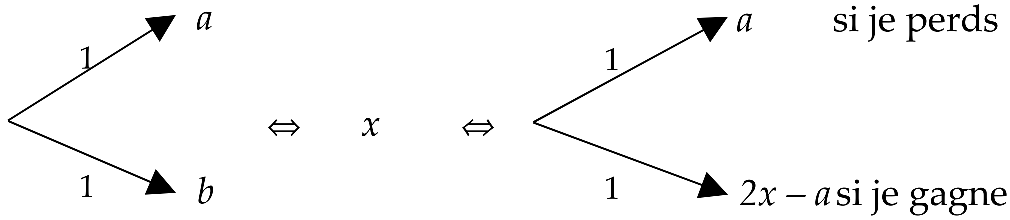


Huygens remplace cette situation de jeu par une autre avec les mêmes cas d'apparition (kans), ici 1 contre 1, mais chaque joueur mise x et le gagnant remporte la mise $2x$ diminuée de a qu'il donne au perdant. On a donc la situation suivante :



Huygens calcule ensuite x pour que la situation de jeu soit équivalente à la précédente, soit $2x - a = b$. D'où le résultat : $x = \frac{a+b}{2}$.

La découverte de la valeur de x passe donc par deux équivalences : on remplace la situation initiale par son espérance inconnue, puis on remplace cette espérance par une autre situation de jeu « équitable », c'est-à-dire où tous les joueurs ont la même table de gains, enfin on identifie les deux tables pour trouver la valeur de l'espérance.



La « preuve » consiste à vérifier que la valeur trouvée de x remplit bien les conditions du principe de réversibilité. L'exemple « en chiffres » n'est qu'une illustration numérique du principe ci-dessus.

PROPOSITION II.

Avoir des chances égales d'obtenir a, b ou c me vaut $\frac{a+b+c}{3}$.

Pour trouver ceci, appelons derechef x la valeur de ma chance. Il faut donc que, possédant x, je puisse me procurer de nouveau les mêmes chances par un jeu équitable. Que ce jeu soit le suivant : je joue contre deux personnes ; chacun de nous trois met x ; je conditionne avec la première qu'elle me donnera b si elle gagne le jeu et réciproquement, avec la seconde qu'elle me donnera c si elle gagne et réciproquement. Il appert que ce jeu est équitable. J'aurai ainsi une chance égale d'avoir b, savoir si le premier joueur gagne, ou c si le deuxième gagne, ou enfin $3x - b - c$ si je gagne moi-même ; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $3x$, dont je donne b à l'un et c à l'autre. Or, si $3x - b - c$ était égal à a, j'aurais des chances égales d'avoir a, b ou c. Je pose donc $3x - b - c = a$, d'où je tire $x = \frac{a+b+c}{3}$, valeur de ma chance. On trouve de même qu'avoir des chances égales d'obtenir a, b, c ou d me vaut $\frac{a+b+c+d}{4}$, et ainsi de suite.

PROPOSITION III.

Avoir p chances d'obtenir a et q d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$.

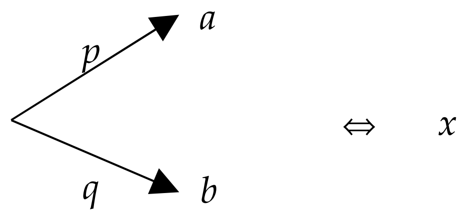
Pour découvrir cette règle, appelons de nouveau x la valeur de ma chance. Il faut donc que, possédant x, je puisse rentrer dans mon premier état par un jeu équitable. A cet effet je prends un nombre de joueurs tel qu'avec moi il y en a $p + q$ en tout, dont chacun met x, de sorte que l'enjeu sera $px + qx$; chacun joue pour son propre compte avec une même chance de gagner. Supposons en outre qu'avec q joueurs, c'est-à-dire avec chacun d'eux en particulier, je fasse cette convention que si l'un d'eux gagne la partie, il me donnera la somme b, et que si moi je gagne, je lui donnerai la même somme. Supposons enfin qu'avec les $p - 1$ joueurs qui restent, ou plutôt avec chacun d'eux en particulier, je fasse la convention que si l'un d'eux gagne la partie, il me donnera la somme a, et que je lui donnerai également la somme a si c'est moi qui gagne la partie. Il est évident qu'à ces conditions, le jeu est équitable, attendu que les intérêts d'aucun joueur ne se trouvent lésés. On voit de plus que j'ai maintenant q chances d'obtenir b, $p-1$ chances d'obtenir a et une chance (au cas où c'est moi qui gagne) d'avoir $px + qx - bq - ap + a$; en effet, dans ce dernier cas je reçois l'enjeu $px + qx$ dont je dois céder b à chacun des q joueurs et a à chacun des $p-1$ joueurs, ce qui fait en tout $qb + ap - a$. Or, si $px + qx - bq - ap + a$ était égal à a, j'aurais p chances d'avoir a (car j'avais déjà $p-1$ chances d'obtenir cette somme) et q chances d'avoir b ; je serais donc revenu à mes chances premières. Je pose donc $px + qx - bq - ap + a = a$, et je trouve $x = \dfrac{pa+qb}{p+q}$ pour la valeur de ma chance, conformément à l'énoncé.

En chiffres. Si j'ai 3 chances de gagner 13, et 2 chances de gagner 8, je possède pour ainsi dire 11, d'après cette règle. Et il est aisé de faire voir qu'étant en possession de 11, je puis me procurer de nouveau ces mêmes chances. En effet, je puis jouer avec 4 autres personnes et chacun de nous cinq peut mettre 11 ; je conviendrai alors avec deux de ces personnes que si l'une d'elles gagne la partie elle me donnera 8 et que, si c'est moi qui gagne, je leur donnerai à chacune la même somme. De même je conviens avec les deux autres que celle des deux qui gagne la partie me donnera 13 et que, si moi je gagne, je leur donnerai à chacune 13 également. Ce jeu sera équitable. Et l'on voit que j'ai ainsi 2 chances d'avoir 8, savoir au cas où l'un des deux joueurs qui m'ont promis cette somme emporte l'enjeu, et 3 chances d'avoir 13, savoir si l'un des deux autres qui doivent me donner cette somme gagne la partie, ou si je gagne moi-même. En effet, dans ce dernier cas je reçois l'enjeu qui est de 55, dont je dois donner 13 à chacun de deux joueurs et 8 à chacun de deux autres joueurs, de sorte qu'il m'en reste également 13.

La proposition III

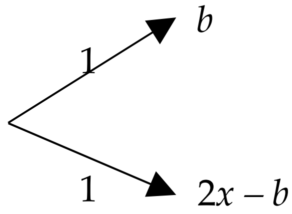
« Avoir p chances d'obtenir a et q d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$ ».

On a la situation suivante :

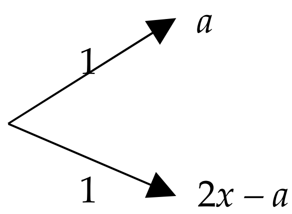


Huygens invente alors un jeu équitable à $p + q$ joueurs dont la table des gains est la même. Tous les joueurs misent x. L'enjeu total est donc $(p + q)x$. Chaque joueur a une chance de gagner la mise.

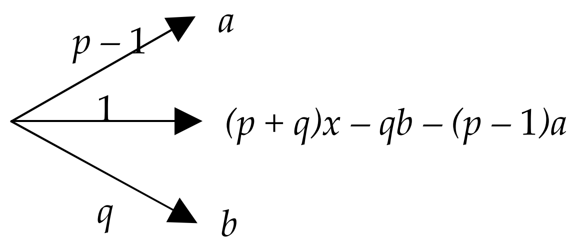
Il y a trois catégories de joueurs : la première comporte q joueurs. Avec chacun d'eux, je conviens que le gagnant reversera b au perdant. Chacun de ces joueurs a donc la table de gains suivante :



Le deuxième groupe de joueurs en comporte $p - 1$. Avec chacun d'eux, je conviens que le gagnant reversera a au perdant. Chacun de ces joueurs a donc la table de gains suivante :



Enfin, en ce qui me concerne, j'ai q chances de gagner b (si l'un des q joueurs du premier groupe gagne), j'ai $p - 1$ chances de gagner a (si l'un des $p - 1$ joueurs du deuxième groupe gagne) et enfin j'ai une chance de gagner $(p + q)x - qb - (p - 1)a$.
Soit la situation de jeu :



Pour revenir à la situation initiale, il faut avoir p chances d'avoir a, donc il faut que :

$$(p + q)x - qb - (p - 1)a = a,$$

ce qui donne le résultat $x = \dfrac{pa + qb}{p + q}$.

PROPOSITION XIV.

Si un autre joueur et moi jettent tour à tour 2 dés à condition que j'aurai gagné dès que j'aurai jeté 7 points et lui dès qu'il en aura jeté 6, tandis que je lui laisse le premier coup, trouver le rapport de ma chance à la sienne.

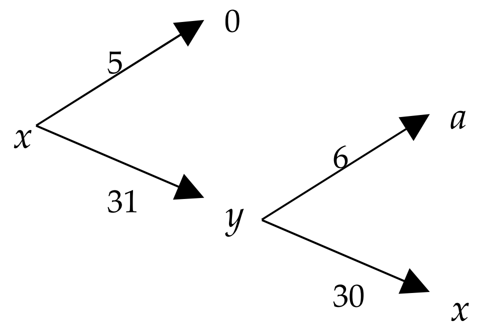
Soit x la valeur de ma chance, et a l'enjeu. La chance de l'autre joueur a donc la valeur $a - x$. Il est évident aussi que chaque fois que c'est son tour de jeter, ma chance aura de nouveau la valeur x. Mais chaque fois que c'est mon tour de jeter, ma chance doit avoir une valeur supérieure, mettons y. Or, attendu que parmi les 36 coups qu'on peut faire avec 2 dés, il y en a 5 qui peuvent donner 6 points à mon adversaire et lui faire gagner la partie, et 31 coups à son désavantage, c'est-à-dire qui amènent mon tour de jeter, j'ai 5 chances d'avoir 0 lorsqu'il jette la première fois, et 31 chances d'avoir y ; ce qui d'après la troisième Proposition, me vaut $\frac{31y}{36}$. Mais nous avons posé que ma chance valait x au commencement du jeu. De sorte que $\frac{31y}{36} = x$, partant $y = \frac{36x}{31}$. Nous avons posé en outre que ma chance vaut y, lorsque c'est mon tour de jeter. Mais lorsque je jette, j'ai 6 chances d'avoir a, attendu qu'il y a 6 coups de 7 points qui me font gagner ; et j'ai 30 chances de faire revenir le tour de mon adversaire, c'est-à-dire d'avoir pour ma part x. La valeur y est donc équivalente à 6 chances d'avoir a et 30 chances d'avoir x ; ce qui, d'après la troisième Proposition, me vaut $\frac{6a + 30x}{36}$. Cette expression étant donc égale à y, et y d'après ce qui précède à $\frac{36x}{31}$, il faut que $\frac{30x + 6a}{36}$ soit égal à $\frac{36x}{31}$, d'où l'on tire $x = \frac{31a}{61}$; valeur de ma chance. Par conséquent, la chance de mon adversaire vaudra $\frac{30a}{61}$. Le rapport de nos chances est donc de 31 à 30.

Solution de la proposition XIV

La proposition XIV est fort intéressante, puisqu'elle envisage, pour la première fois, un jeu éventuellement infini. L'infinité éventuelle du jeu n'apparaît pas, elle est masquée par une démonstration qui revient en fait à n'étudier que les deux premiers coups, en admettant qu'on se retrouve après dans la situation antérieure. Cela suppose l'indépendance des tirages et donc l'absence de mémoire de la situation. Huygens peut faire son calcul en faisant l'hypothèse de l'existence de l'espérance (qui mériterait, ici, démonstration) d'après son premier principe. L'hypothèse suivante – l'espérance de l'autre joueur en fonction de la mienne – suppose que la probabilité que le jeu ne finisse pas est nulle. Néanmoins, c'est par commodité que Huygens pose cette hypothèse. En effet, il pourrait faire un calcul semblable pour le deuxième joueur. Tout le calcul repose donc sur cette unique hypothèse que "*la valeur de ma chance a une valeur déterminée*". En termes modernes, une démonstration ferait intervenir des séries géométriques. On pourra en voir un exemple dans le texte de Bernoulli.

La situation de jeu peut être illustrée par l'arbre ci-dessous où les notations sont celles de Huygens.

« Mon adversaire joue » « Je joue »



On applique ensuite deux fois la proposition III du traité de Huygens et en résolvant le système d'équations, on exprime les sorts des deux joueurs.

$x = \dfrac{5 \times 0 + 31 \times y}{5 + 31}$ soit $x = \dfrac{31y}{36}$ et $y = \dfrac{6 \times a + 30 \times x}{36}$ d'où l'on tire $x = \dfrac{31a}{61}$.

Le point fondamental de la résolution consiste à remarquer que l'arbre est « circulaire », c'est-à-dire que, si à l'issue des deux premiers coups aucun des deux joueurs n'a gagné, la situation de jeu est la même que la situation initiale et donc que les espérances de gain sont les mêmes.

CHRISTIAAN HUYGENS

DU CALCUL DANS LES JEUX DE HASARD

Je termine en faisant suivre encore quelques Propositions.

I). A et B jouent ensemble avec 2 dés à la condition suivante : A aura gagné s'il jette 6 points, B s'il en jette 7. A fera le premier un seul coup ; ensuite B 2 coups successifs ; puis de nouveau A 2 coups, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un ou l'autre aura gagné. On demande le rapport de la chance de A à celle de B ? Réponse : comme 10 355 est à 12 276.

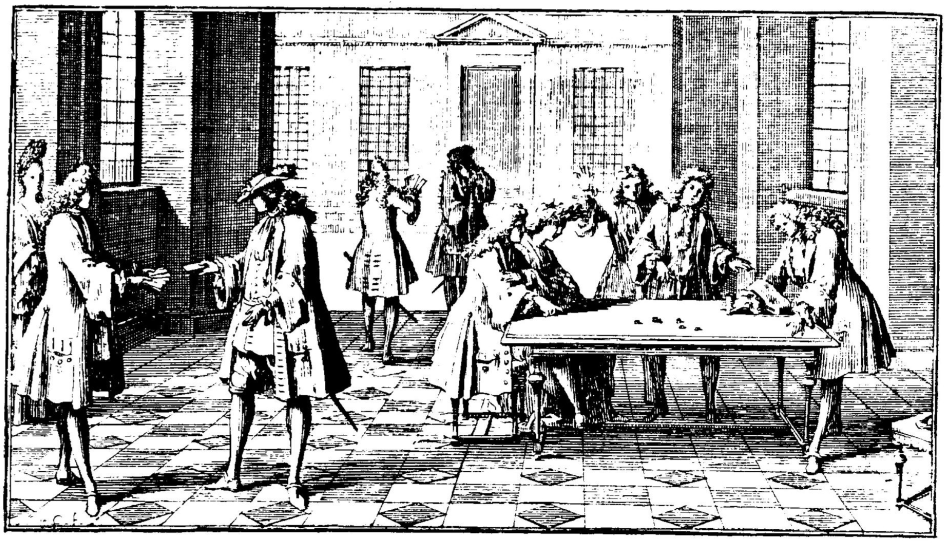
II). Trois joueurs A, B et C prennent 12 jetons dont 4 blancs et 8 noirs ; ils jouent à cette condition que celui gagnera qui aura le premier, en choisissant à l'aveuglette, tiré un jeton blanc, et que A choisira le premier, B ensuite, puis C, puis de nouveau A et, ainsi de suite, à tour de rôle. On demande le rapport de leurs chances ?

III). A parie contre B, que de 40 cartes, dont dix de chaque couleur, il en tirera 4 de manière à en avoir une de chaque couleur. On trouve dans ce cas que la chance de A est à celle de B comme 1 000 est à 8 139.

IV). On prend comme plus haut 12 jetons dont 4 blancs et 8 noirs. A parie contre B que parmi 7 jetons qu'il en tirera à l'aveuglette, il se trouvera 3 blancs. On demande le rapport de la chance de A à celle de B.

V). Ayant pris chacun 12 jetons, A et B jouent avec 3 dés à cette condition qu'à chaque coup de 11 points, A doit donner un jeton à B, mais que B en doit donner 1 à A à chaque coup de 14 points, et qui celui là gagnera qui sera le premier en possession de tous les jetons. On trouve dans ce cas que la chance de A est à celle de B comme 244 140 625 est à 282 429 536 481.

FIN.



QUATRIÈME PARTIE.

Où l'on donne la ſolution de divers Problêmes ſur le hazard, & en particulier des cinq Problêmes propoſés en l'année 1657 par Monſieur Huygens.

Essay d'Analyse sur les jeux de Hazard par Pierre Rémond de Montmort

PIERRE RÉMOND DE MONTMORT

ESSAY D'ANALYSE SUR LES JEUX DE HAZARD

QUATRIÈME PARTIE.

Où l'on donne la solution de divers Problèmes sur le hazard, et en particulier des cinq Problèmes proposés en l'année 1657 par Monsieur Huygens.

PROBLÈME I.
PROPOSITION XXXII.

Pierre et Paul jouent ensemble avec deux dés : Voici les conditions du jeu. Pierre gagnera en amenant six, et Paul en amenant sept. Chacun des deux jouera deux coups de suite lorsqu'il aura les dés : cependant Pierre qui commencera n'en jouera qu'un pour la première fois. Il s'agit de déterminer le sort de chacun des deux Joueurs, ou l'espérance que chacun aura de gagner la partie.

SOLUTION.

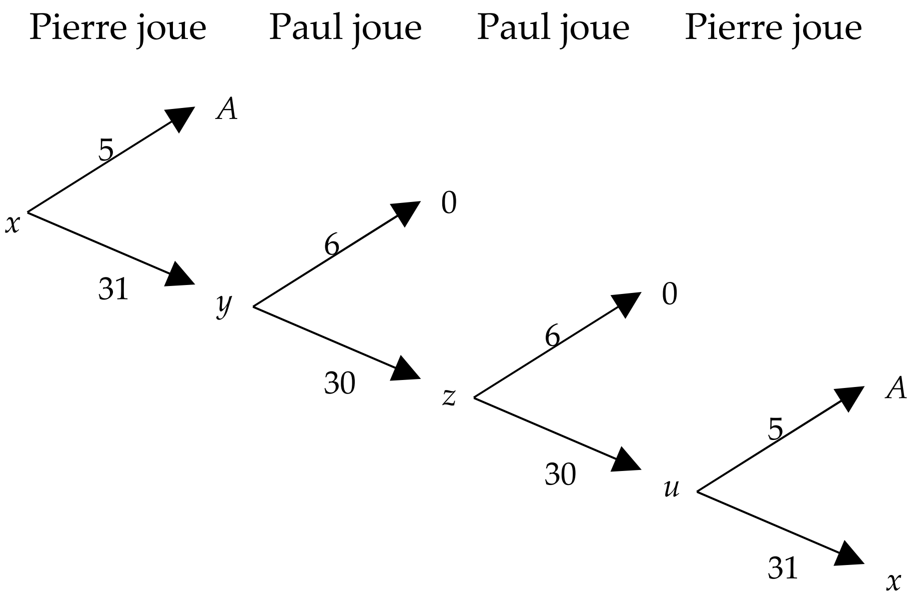
169. Puisque chaque face de l'un des dés se peut trouver successivement avec toutes les faces de l'autre, il est clair que les deux dés peuvent donner trente-six coups, & que de ces trente-six coups il y en a cinq qui donnent le nombre de six, sçavoir as & cinq, cinq & as, deux & quatre, quatre & deux & terne, & six qui donnent le nombre de sept, sçavoir as & six, six & as, deux & cinq, cinq & deux, trois & quatre, quatre & trois.

Présentement soit nommée A l'argent du jeu, x le sort de Pierre lorsqu'il va jouer son coup, y son sort lorsque Paul va jouer son premier coup, z son sort lorsque Paul va jouer son second coup, & enfin u son sort lorsque le tour de Pierre revenant il va jouer le premier de ses deux coups.

On aura ces quatre égalités, $S = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36}y$, $y = \frac{30}{36}z$, $z = \frac{30}{36}u$, $u = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36}x$; ce qui donne $S = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36} \times \frac{25}{36} \times \overline{\frac{5}{36}A + \frac{31}{36}x}$; d'où l'on tire par réduction et transposition $S = \frac{10\,355}{22\,631}A$, ce qui exprime le sort de Pierre, & $A - S = \frac{12\,276}{22\,631}A$ qui exprime celui de Paul.

La solution du problème 1 par Montmort

La situation de jeu peut être illustrée par l'arbre ci-dessous où les notations sont celles de Montmort.



On applique ensuite quatre fois la proposition III du traité de Huygens et en résolvant le système d'équations, on exprime les sorts des deux joueurs.

Le point fondamental de la résolution consiste à remarquer que l'arbre est « circulaire », c'est-à-dire que, si à l'issue des quatre premiers coups aucun des deux joueurs n'a gagné, la situation de jeu est la même que la situation initiale et donc que les espérances de gain sont les mêmes.

JACQUES BERNOULLI

L'ART DE CONJECTURER

Extraits n°1

[Remarque sur la proposition III de Huygens]

Corollaire 4.

Si j'ai p cas pour avoir a, q pour b et r pour rester dans l'état où je suis, c'est-à-dire, pour conserver mon sort actuel, ce sort sera $\frac{pa+qb}{p+q}$, précisément le même que si je n'avais aucun des cas dont le nombre est r. Car, soit x la valeur de mon sort actuel, j'ai, par hypothèse, p cas pour a, q pour b, et r pour x, ce qui, selon la règle, vaut $\frac{pa+qb+rx}{p+q+r}$; et comme ce même sort a été nommé x, on a $x = \frac{pa+qb+rx}{p+q+r}$; ou en multipliant par le diviseur du second membre, $px + qx + rx = pa + qb + rx$, et, en effaçant rx, $px + qx = pa + qb$, ou enfin, $x = \frac{pa+qb}{p+q}$.

[Remarque sur la proposition XII de Huygens]

RÈGLE

Pour connaître le sort d'un joueur à qui sont accordés plusieurs jets, et qui est tenu d'amener un hasard donné à quelques-uns de ces jets précisément, et non à d'autres.

Multipliez le produit des cas qui donnent le hasard dont il s'agit, et où le joueur est tenu de l'amener, par celui des cas qui ne le donnent point, et où il est tenu de ne pas l'amener, et divisez ce dernier produit par celui de tous les cas qui ont lieu pour tous les jets : le quotient exprimera le sort cherché.

[Remarque sur la proposition XIV de Huygens]

Il y a une autre voie particulière qui conduit à la solution du problème, sans analyse, et qui peut servir aussi dans ce qui va suivre. Au lieu de deux joueurs jetant alternativement les dés, supposons-en une infinité, à chacun desquels il soit accordé un seul jet, et jouant successivement, à condition que celui des joueurs en ordre impair, qui le premier amènera six points, ou des joueurs en ordre pair, qui le premier amènera sept, gagnera la partie, et emportera le dépôt. Dans cette hypothèse, il est clair que le second joueur ne peut gagner, à moins que le dernier des deux premiers jets ne soit le seul qui donne sept points ; que le troisième ne peut avoir l'avantage, à moins que le troisième des trois premiers jets ne soit le seul qui en donne six ; ni le quatrième, à moins que le dernier des quatre premiers jets ne soit le seul qui en donne sept, et ainsi de suite : si donc à 5 et à 31, nombres des cas favorables, et contraires à six points, avec deux dés, nous substituons b et c, qu'à 6 et à 30, nombres des cas favorables, et contraires à sept points, nous substituons e et f, et que nous représentons par a le nombre de tous les cas $b + c$, ou $e + f$, la règle apposée à la fin des remarques sur la proposition XII, nous donnera les sorts des joueurs comme il suit

Joueurs	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII	etc.
Sorts	$\frac{b}{a}$	$\frac{ce}{aa}$	$\frac{bcf}{a^3}$	$\frac{ccef}{a^4}$	$\frac{bccff}{a^5}$	$\frac{c^3eff}{a^6}$	$\frac{bc^3f^3}{a^7}$	$\frac{c^4ef^3}{a^8}$	etc.

Si l'on suppose maintenant que le premier, le troisième, le cinquième et autres joueurs en ordre impair, soient remplacés par un seul, que le second, le quatrième, le sixième et autres en ordre pair, le soient par moi, il est constant qu'on aura l'espèce même de la question présente, et de plus, que mon attente et celle de l'autre remplaçant seront respectivement égales à la somme de celles des joueurs, auxquels nous sommes respectivement substitués. Mon sort sera donc exprimé par $\frac{ce}{aa} + \frac{ccef}{a^4} + \frac{c^3eff}{a^6} + \frac{c^4ef^3}{a^8}$ etc. et le sort de mon adversaire par $\frac{b}{a} + \frac{bcf}{a^3} + \frac{bccff}{a^5} + \frac{bc^3f^3}{a^7}$ etc, suites infinies géométriquement proportionnelles dans la raison de aa à cf, dont la première donne pour somme $\frac{ce}{aa - cf}$, et la seconde $\frac{ab}{aa - cf}$; de sorte que mon sort est à celui de mon adversaire, comme ce est à ab, ou en reprenant les valeurs des lettres a, b, c et e, comme 31 est à 30, précisément comme ci-dessus.

[Solution du problème 1 de Huygens]

Supposons que le sort de A vaut t lorsqu'il commence à jouer, x lorsque le tour de B est venu, y lorsque B a joué une fois, z lorsque B a joué deux fois, c'est-à-dire lorsque les dés reviennent à A. Car comme tous ces sorts sont différents et inconnus, que celui qui précède dépend de celui qui suit, et le dernier du premier, ainsi que l'opération va le démontrer, on ne peut, selon ce qui a été remarqué sur la dernière proposition, on ne peut, dis-je, résoudre ce problème, du moins par la méthode de l'auteur, qu'en employant l'analyse algébrique. Maintenant, puisque sur les 36 cas qu'on a de deux dés, il y en a 5 qui donnent six points à A et lui font gagner le pari, et 31 qui font passer les dés à B, A aura, au commencement du jeu 5 cas pour obtenir a, ou le dépôt, et 31 cas pour obtenir x, ce qui, par la proposition tant de fois citée, vaut $\frac{5a+31x}{36}$, et comme ce même sort a d'abord été appelé t, on aura $t = \frac{5a+31x}{36}$. En second lieu, le tour de B arrivant, A a 6 cas pour avoir zéro (puisqu'il y a six cas pour 7 points, qui sont favorables à son adversaire), et il y a 30 cas pour acquérir y, ce qui lui vaut $\frac{5}{6}y$. Mais c'est ce sort-là même que nous avons précédemment exprimé par x ; donc $x = \frac{5}{6}y$. En troisième lieu, lorsque B après le premier jet va passer au second, A, par la même raison, a 6 cas pour 0 et 30 pour le sort suivant z ; et comme alors même il est supposé obtenir y, on aura $y = \frac{5}{6}z$. Enfin les dés revenant à A, ce qui lui donne le sort que nous avons nommé z, il a 5 cas pour amener 6 points et par conséquent pour avoir a, et 31 cas pour ne pas les amener et par conséquent pour avoir son premier sort t ; car s'il n'amène pas 6 points, les deux joueurs seront au même état qu'au commencement, puisqu'il restera encore un jet à A, après quoi il devra y en avoir deux pour B, puis deux pour A, et ainsi de suite, précisément comme au commencement du jeu : or il est constant que 5 cas pour a et 31 cas pour t valent $\frac{5a+31t}{36}$; donc $z = \frac{5a+31t}{36}$. Après avoir ainsi trouvé autant d'équations qu'il y a d'inconnues, il faut remonter des dernières aux premières, et substituer la valeur de z tirée de la dernière dans la troisième, pour avoir $y = \frac{25a+155t}{216}$, substituer ensuite cette valeur dans la seconde, ce qui donne $x = \frac{125a+775t}{1\,296}$, et enfin substituer cette dernière valeur dans la première. On aura de cette manière le sort cherché $t = \frac{10\,355a}{22\,631}$, et il restera pour le sort de B $\frac{12\,276a}{22\,631}$: de sorte que le sort de A sera au sort de B comme 10 355 à 12 276, ainsi que l'auteur l'a trouvé.

[...]

Soient une infinité de joueurs à chacun desquels il soit accordé un jet, et supposez que le premier, le quatrième et le cinquième, le huitième et le neuvième, et ainsi de suite de deux en deux, doivent gagner le pari s'ils amènent le point de 6 ; et que les autres, c'est-à-dire, le second, le troisième, le sixième et le septième, etc., doivent le gagner s'ils amènent le point de 7. Alors cherchez par la règle annexée aux remarques sur la proposition XII les attentes respectives de ces joueurs : vous les trouverez, comme il suit, en donnant aux lettres *a*, *b*, *c*, *e*, *f* les mêmes valeurs que dans les remarques sur la proposition précédente,

I	II	III	IV	V	VI	VII
A	B	B	A	A	B	B
$\frac{b}{a}$	$\frac{ce}{aa}$	$\frac{cef}{a^3}$	$\frac{bcff}{a^4}$	$\frac{bccff}{a^5}$	$\frac{c^3eff}{a^6}$	$\frac{c^3ef^3}{a^7}$
VIII	IX	X	XI	XII	etc.	
A	A	B	B	A		
$\frac{bc^3f^4}{a^8}$	$\frac{bc^4f^4}{a^9}$	$\frac{c^5ef^4}{a^{10}}$	$\frac{c^5ef^5}{a^{11}}$	$\frac{bc^5f^6}{a^{12}}$	etc.	

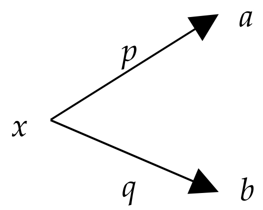
Si donc nous remplaçons par A tous les joueurs que le point de 6 fait gagner, et par B tous ceux qui gagnent par le point de 7, nous aurons l'espèce du présent problème, et nous en conclurons que le sort de A sera $\frac{b}{a} + \frac{bcff}{a^4} + \frac{bccff}{a^5} + \frac{bc^3f^4}{a^8} + \frac{bc^4f^4}{a^9} + \frac{bc^5f^6}{a^{12}}$, etc., et le sort de B $\frac{ce}{aa} + \frac{cef}{a^3} + \frac{c^3eff}{a^6} + \frac{c^3ef^3}{a^7} + \frac{c^5ef^4}{a^{10}} + \frac{c^5ef^5}{a^{11}}$, etc.

Et comme dans chacune de ces deux séries les termes pairs et les termes impairs pris séparément forment des progressions géométriques décroissantes dans la raison $ccff : a^4$, il est clair qu'on pourra sommer l'une et l'autre. Or la somme de la première se trouve être $\frac{a^3b + bcff}{a^4 - ccff}$, et celle de la seconde $\frac{aace + acef}{a^4 - ccff}$; de manière que le sort de A est au sort de B comme $a^3b + bcff$ est à $aace + acef$, c'est-à-dire, à cause de $a = 36$, $b = 5$, $c = 31$, $e = 6$, $f = 30$, comme 372 780 à 441 936, ou comme 10 355 à 12 276, précisément dans le même rapport que ci-dessus.

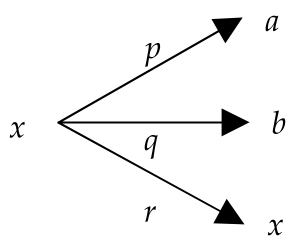
Les remarques de Bernoulli et sa solution du problème 1

Il a été déjà indiqué que la première partie de l'*Ars Conjectandi* de Jacques Bernoulli était une reprise annotée et commentée du traité de Huygens. Bernoulli présente des compléments à des propriétés énoncées par Huygens ou des démonstrations alternatives.

Dans le **premier texte**, Bernoulli commente la proposition III de Huygens : « *avoir p chances d'obtenir a et q d'obtenir b, me vaut* $\frac{pa+qb}{p+q}$ » et considère une éventualité supplémentaire « *avoir r chances de rester dans l'état où je suis* ». Il remplace donc la situation de jeu représentée par l'arbre suivant, où x désigne le sort ou l'espérance de gain du joueur :



par la situation de jeu suivante :



La proposition III (ou plutôt sa généralisation) permet d'écrire l'équation : $x=\frac{pa+qb+rx}{p+q+r}$,

d'où on tire facilement : $x=\frac{pa+qb}{p+q}$. Cela revient à dire que l'éventualité supplémentaire introduite ne change pas l'espérance du joueur quelle que soit la valeur de r. Sur ce texte on pourra consulter les exercices 3 et 4 de la première partie.

Le **deuxième texte** énonce une règle générale pour trouver l'espérance d'un joueur lors d'épreuves successives. Cette règle est placée à la fin des remarques sur la proposition XII de Huygens : « *trouver le nombre de dés avec lequel on peut accepter de jeter 2 six du premier coup* ». Cet énoncé (qui définit d'une certaine manière la probabilité produit) revient à dire que si les événements E_1, E_2, …, E_n obtenus lors de n épreuves successives indépendantes, chaque E_i ayant comme probabilité $\frac{x_i}{a}$ (x_i est le nombre de cas favorables à E_i, a est le nombre total de cas), la probabilité d'obtenir successivement E_1, E_2, …, E_n est égale à $\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{a^n}$. Cette règle permet d'accélérer les calculs dans tous les cas d'épreuves répétées, comme celui de la proposition XIV de Huygens.

Le **troisième texte** donne une démonstration alternative de cette proposition XIV : il s'agit de trouver les espérances de gain de deux joueurs qui ont alternativement une certaine probabilité de gagner dans une succession de coups indépendants. Le jeu ne s'arrête qu'après la victoire de l'un des deux joueurs. Cette situation de jeu est potentiellement infinie. La démonstration de Huygens, en n'étudiant en fait que les deux premiers coups, esquive la difficulté de cette première apparition de l'infini dans le calcul des probabilités.

Bernoulli présente une démonstration complètement différente (« *sans analyse* ») qui consiste à imaginer une succession infinie de joueurs, jouant chacun un seul coup. Les joueurs placés aux rangs impairs gagnent ou perdent respectivement avec des chances égales à b et c ; les joueurs placés aux rangs pairs gagnent ou perdent avec des chances égales à e et f , avec $a = b + c = e + f$. La règle énoncée dans l'extrait précédent permet alors de trouver l'espérance de gain pour chacun des joueurs :
un joueur gagne au rang impair, $2n + 1$, si n joueurs de rangs impairs ont perdu et si n joueurs de rangs pairs ont perdu alternativement, d'où son espérance est $\frac{bc^n f^n}{a^{2n+1}} = \frac{b}{a}\left(\frac{cf}{a^2}\right)^n$;
de même l'espérance d'un joueur de rang pair, $2n$, est $\frac{c^n e f^{n-1}}{a^n} = \frac{e}{f}\left(\frac{cf}{a^2}\right)^n$.

Il ne reste plus qu'à additionner les espérances de tous les joueurs de rangs impairs d'une part, et celles de tous les joueurs de rangs pairs d'autre part pour obtenir les espérances respectives des deux joueurs initiaux. Les deux séries obtenues sont géométriques de raison $\frac{cf}{a^2}$, leurs sommes sont donc connues. On sait en effet que, si $0 < r < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$.

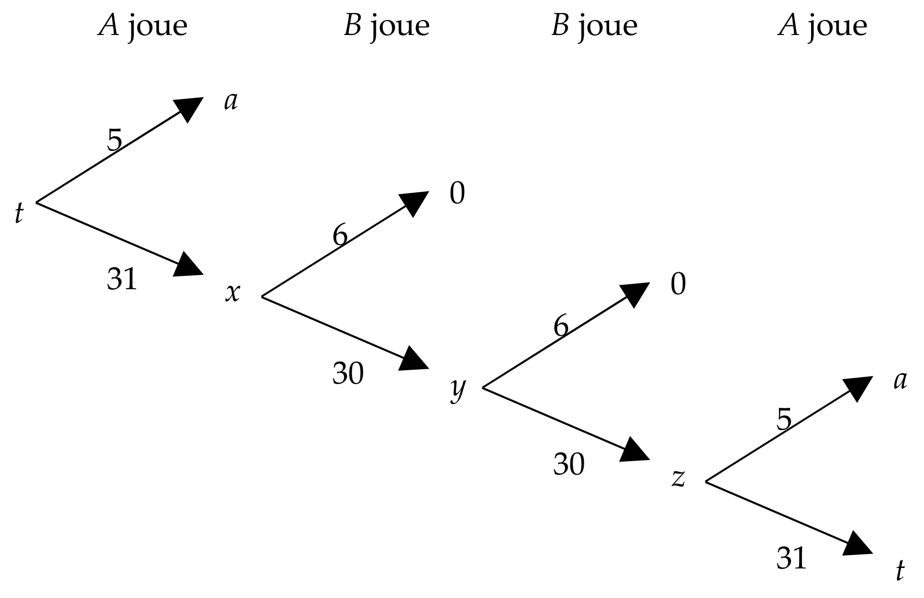
L'espérance du premier joueur est donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e}{f}\left(\frac{cf}{a^2}\right)^n = \frac{e}{f}\frac{\frac{cf}{a^2}}{1-\frac{cf}{a^2}} = \frac{ce}{a^2-cf}$.

Celle du second joueur est : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b}{a}\left(\frac{cf}{a^2}\right)^n = \frac{b}{a}\frac{1}{1-\frac{cf}{a^2}} = \frac{ab}{a^2-cf}$.

La différence entre les deux méthodes est considérable. Huygens postule l'existence des espérances de gain, existence qui n'a rien d'évident dans le cas où le jeu est potentiellement infini : ce qui permet un calcul particulièrement élégant sans intervention de sommation infinie. Bernoulli n'esquive pas ce problème et considère des sommes effectivement infinies. Il envisage le cas de probabilité nulle où le jeu ne se termine pas. Enfin il démontre l'existence des deux espérances en les calculant explicitement ; la seule supposition implicite est celle de la convergence d'une série géométrique.

Le **quatrième texte** donne la solution de Bernoulli au premier problème de Huygens. Dans la lignée de ce qui précède, Bernoulli donne en fait deux solutions : l'une suit strictement la méthode *analytique* de Huygens, l'autre reprend l'autre voie *synthétique* présentée ci-dessus.

La première méthode, tout à fait semblable à la solution de Montmort (voir plus haut), peut être illustrée par l'arbre suivant, où t, x, y, z désignent les espérances de A respectivement au début de la partie ou après avoir joué un premier coup d'une série de deux, avant que B joue un premier coup, avant que B joue un deuxième coup, après le deuxième coup de B. a désigne la mise en jeu.



Appliquée 4 fois, la proposition III donne : $t = \frac{5a+31x}{36}$; $x = \frac{30}{36}y$; $y = \frac{30}{36}z$; $z = \frac{5a+31t}{36}$.
La résolution d'un système de 4 équations à 4 inconnues permet alors la conclusion.

La deuxième méthode utilise deux séries géométriques de raison $\frac{c^2 f^2}{a^4}$ où c et f représentent les nombres de cas perdants pour chacun des joueurs sur les a cas possibles. La sommation de ces deux séries conduit au résultat obtenu dans une situation plus générale que par la première méthode.

BIBLIOGRAPHIE

Sources utilisées ou consultées

BERNOULLI, Jacques

– *L'art de conjecturer*, traduit du latin par L. G. F. VASTEL, membre du Lycée et de la Société d'Agriculture et de Commerce de Caen, G. Le Roy, Caen, 1801.

Extraits n°1 : remarques sur les propositions III, XII, XIV et le problème 1 de Huygens, pp. 15-16, p. 63, pp. 68-69, pp. 70-75.

HUYGENS, Christiaan

– *Du Calcul dans les jeux de hasard,* in *Œuvres Complètes de Christiaan Huygens,* publiées par la Société Hollandaise des Sciences, La Haye, Martinus Nijhoff, 1888-1950, tome XIV, traduction D.J. Kortwerg.

– *Biographie de Chr. Huygens*, in *Œuvres Complètes de Christiaan Huygens,* publiées par la Société Hollandaise des Sciences, La Haye, Martinus Nijhoff, 1888-1950, tome XXII, publiées par D.J. Kortwerg, pp. 383-778.

[Les Œuvres Complètes de Huygens sont disponibles sur le site de la BNF : Gallica.]

MONTMORT, Pierre Rémond (de)

– *Essay d'Analyse sur les jeux de Hazard*, 2ème édition, Paris, J. Quillau, 1713.

Extrait n°1 : prop XXXII sur le problème 1 de Huygens, pp. 216-217.

Pour aller plus loin

ANDRIESSE, Cornelis Dirk

– *Christian Huyghens,* traduit du néerlandais par Danielle Losman, éd. Albin Michel, Paris, 1998.

CERCLE D'HISTOIRE DES SCIENCES – IREM DE BASSE-NORMANDIE ,

– *L'ESPÉRANCE DU HOLLANDAIS ou le premier traité de calcul du hasard,* conception, illustrations et mise en page par Denis Lanier et Didier Trotoux, éd. Ellipses, Paris, 2006. [Le texte de cet article est tiré en grande partie de cet ouvrage.]