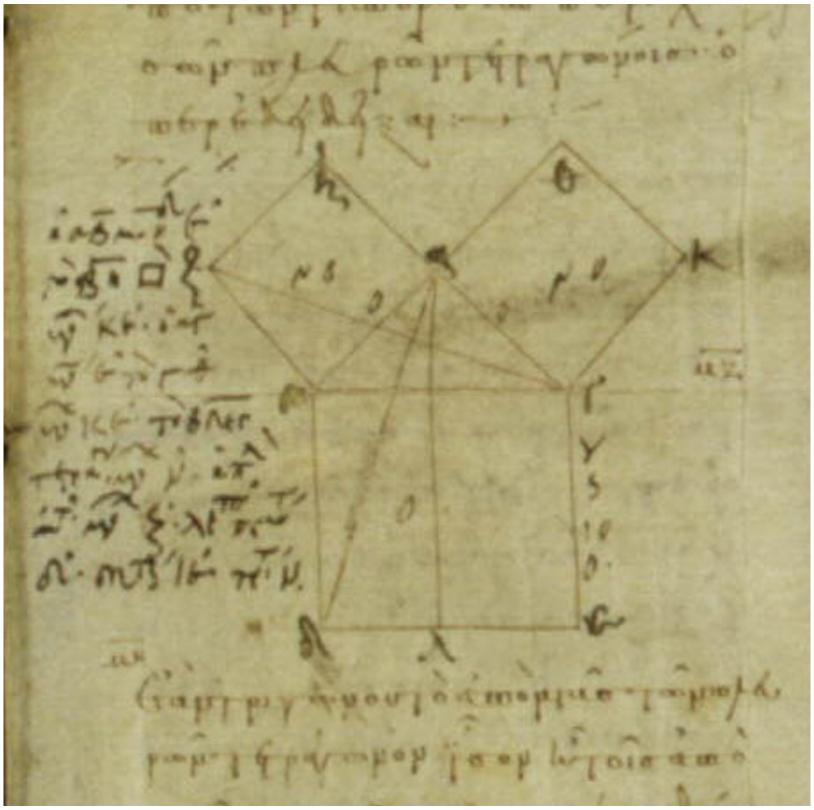
Un aperçu des *Eléments* d'Euclide

Olivier Keller

(Exposé à l'Université Ouverte

Lyon, février 2009)

Sommaire



La figure de la proposition 47 du Livre I dans le plus vieux manuscrit actuellement connu des *Eléments*.

Les *Eléments* datent d'environ -300, mais le plus vieux manuscrit dont nous disposons date du 9e siècle après J.-C. ; il s'agit d'une copie d'un manuscrit qui date du 4e siècle après J.-C. au plus tard. La traduction française de référence est due à Bernard Vitrac, aux Presses Universitaires de France.

Le mot « élément » ne doit pas être pris dans l'acception de proposition simple pour un manuel à l'usage de débutants. Il faut entendre en réalité « ordre des éléments », et il semble d'ailleurs que ce soit le titre originel de l'ouvrage ; c'est donc d'un *système*, d'un *enchaînement* dont il s'agit, au sein duquel :

- les définitions, demandes (postulats), notions communes (axiomes) sont des « éléments » des propositions (théorèmes ou constructions) dans le sens où les premières sont nécessaires pour établir les secondes,
- les propositions sont des « éléments » des propositions qui en découlent.

Nous apprécierons l'architecture de cet impressionnant édifice hypothético-déductif en étudiant l'une des propositions phares de l'œuvre d'Euclide : la proposition 47 du Livre I qui énonce le théorème « de Pythagore ». Partant de cette proposition, nous en chercherons tous les « éléments », c'est-à-dire tout l'arsenal (axiomes, postulats, propositions et constructions antérieures) mobilisé par Euclide pour prouver le fameux théorème.

Les *Eléments* d'Euclide eurent des antécédents en Grèce antique ; d'après le commentateur Proclus de Lycie (né à Byzance, 5e siècle de notre ère), le premier à se lancer dans l'aventure fut Hippocrate de Chio (né vers -470, à ne pas confondre avec son contemporain le médecin Hippocrate de Cos), connu pour sa quadrature des lunules. Proclus cite au moins cinq autres *Eléments*, et il ne nous reste de l'ensemble que quelques extraits d'Hippocrate. Euclide, dit Proclus, mit en ordre et perfectionna beaucoup de résultats de ses devanciers, et surtout :

> « il éleva au niveau de démonstrations irréfutables ceux dont ses prédécesseurs n'avaient rendu compte que de façon assez relâchée »

Aux 5e et 4e siècles avant notre ère, la Grèce antique a donc connu une intense activité de création *d'éléments*, au sens précisé plus haut. Il importe de bien saisir le changement qualitatif que cette activité représente par rapport aux corpus mathématiques antérieurs égyptiens, babyloniens et même védiques, et aux corpus postérieurs comme les *Neuf Chapitres* chinois.

La nouveauté, avec les mathématiques de la Grèce antique, ne réside pas tant dans l'existence de démonstrations, car il en existe, et de fort belles, dans les corpus cités, que :

- dans la volonté de de *faire système*, avec des éléments de départ clairement annoncés et un enchaînement déductif systématique,
- dans l'utilisation du « raisonnement par l'absurde », c'est-à-dire de l'utilisation du *principe de non-contradiction* comme méthode de déduction.

Chez Euclide rien n'est spontanément évident, tout est posé, et il me semble clair que cette nouvelle attitude est une conséquence de la naissance de la philosophie, par laquelle l'esprit humain ne se contente plus de penser, mais pose la pensée elle-même et la possibilité de ses concepts comme objets d'étude. De la même façon, le mathématicien ne se contente plus de manipuler des nombres et des figures ; il cherche à justifier leur existence au moyen d'éléments fondateurs, et l'évidence elle-même, si l'on est contraint d'y recourir, est posée et non supposée, explicite et non implicite. Ainsi, Euclide commence-t-il son traité avec des *définitions* des objets fondamentaux (point, ligne, ligne droite, surface, surface plane, angle, figure, cercle, triangle…), suivies de *demandes* ou postulats qui proposent au lecteur d'accepter la possibilité de certaines figures (on peut mener une ligne droite de tout point à tout point, on peut décrire un cercle à partir de tout centre et avec tout rayon…), suivies enfin des *notions communes*, ou axiomes, qu'il n'est pas besoin de "demander" au lecteur, mais qu'il faut néanmoins poser (les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles, le tout est plus grand que la partie …).

Quant au principe de non-contradiction, martelé par Parménide (fin du 6e, première moitié du 5e siècle avant J.-C.), c'est la grande affaire de la philosophie grecque : il s'agissait en effet de rompre avec la dialectique spontanée de la pensée archaïque qui exprime à sa façon, dans les mythes et les rites, que les contraires coexistent et passent l'un dans l'autre. On ne remarque pas toujours suffisamment que les mathématiques préeuclidiennes (Egypte, Mésopotamie, Inde védique) ou de style préeuclidien (Chine antique) n'utilisent jamais le « raisonnement par l'absurde » ; elles sont « constructives », pourrait-on dire de nos jours. Au contraire, tout l'édifice euclidien s'effondrerait sans le principe de non-contradiction ; de plus, la raison d'une bonne partie du contenu de l'œuvre d'Euclide est la découverte des irrationnels (5e siècle avant J.-C ?), autrement dit que certaines grandeurs ne sont pas commensurables. En termes actuels : tous les nombres ne sont pas des rationnels (des fractions)[1]. Le premier cas découvert fut celui de la diagonale du carré : il n'existe pas de segment qui mesure exactement à la fois le côté et la diagonale d'un carré. Or, *toutes* les démonstrations de l'incommensurabilité de la diagonale reposent sur le principe de non-contradiction : en substance, on démontre que si un segment mesurait à la fois le côté et la diagonale d'un carré, un nombre pourrait être à la fois pair et impair, ce qui est absurde. Absurde ? A condition d'admettre qu'une chose et son contraire ne peuvent coexister ; or le monde réel est fait de coexistence des contraires, une évidence que la pensée préphilosophique percevait à sa façon.

Où en sommes-nous aujourd'hui ? On sait qu'au début du siècle dernier les mathématiciens et les logiciens se sont lancés dans une grande chasse à la contradiction à la suite de la découverte de paradoxes au cœur de la théorie qui devait fonder tout l'édifice mathématique, la théorie des ensembles. Le résultat fut le théorème de Gödel, qui *démontre* l'existence, au sein de l'arithmétique, d'un théorème vrai qui affirme de lui-même non pas qu'il est faux, mais qu'il est *indémontrable*. Sommes-nous vraiment débarrassés de la contradiction en mathématiques ? Laissons cette question en suspens et revenons à Euclide.

---

[1] Soient deux grandeurs représentées par deux segments de droite a et b. Contrairement à ce que peut suggérer l'intuition, il n'existe pas nécessairement de segment u contenu un nombre entier de fois dans a et dans b. Autrement dit, on n'a pas nécessairement $a = pu$ et $b = qu$, c'est-à-dire $a/b = p/q$, avec p et q entiers.

L'examen détaillé de la preuve du théorème de l'hypoténuse (propositions 47 et 48 du Livre I) nous permettra de saisir le changement radical par rapport aux textes préeuclidiens, à savoir l'enchaînement systématique d'une part et l'usage du principe de non-contradiction d'autre part. Ensuite, nous verrons comment Euclide résout :

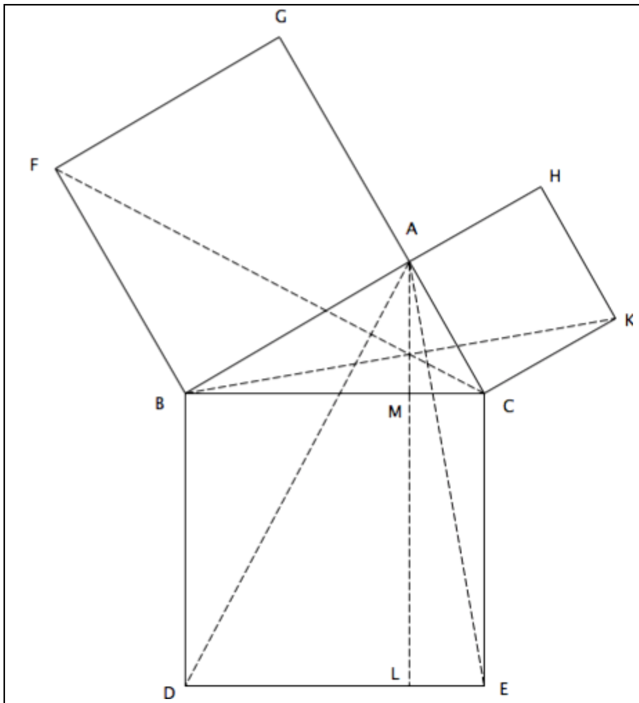
- le problème de la quadrature des figures rectilignes (proposition II-14 des *Eléments*), abordé dans tous les textes préeuclidiens. Réaliser la quadrature d'une figure, c'est calculer ou construire le carré équivalent (de même aire) à cette figure.
- le problème de la construction d'une figure homothétique à une figure donnée et égale à une autre (prop VI-25 des *Eléments*). Les *sulbasutras* (voir le troisième exposé du cycle), abordent le problème dans un cas particulier : contruire un autel en forme d'oiseau d'aire 8,5 *purusas* carrés à partir d'un autel de même forme de 7,5 *purusas* carrés.

La proposition 47 du Livre I

Enoncé

Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.

Grandes lignes de la preuve donnée par Euclide



Soit ABC un triangle rectangle d'hypoténuse BC.
Aire[2] ABFG = 2×aire FBA = 2×aire FBC (parce que FBA et FBC sont deux triangles de même base FB et « situés entre les mêmes parallèles » FB et AC)
Aire BMLD = 2×aire BMD = 2×aire BAD (même raison)
Mais les triangles FBC et BAD sont égaux (un angle égal compris entre deux côtés égaux), donc aire ABFG = aire BMLD.
On démontre de même que aire AHKC = aire MLEC, donc finalement :
aire BDEC = aire BMLD + aire MLEC = aire FBAG + aire ACKH. **Cqfd**

Voilà une démonstration simple et qui semble ne solliciter que deux théorèmes préalables, eux-mêmes faciles à démontrer : deux triangles de même base et de hauteurs égales sont égaux en aire, et deux triangles ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux sont superposables. En réalité, si l'on dénombre tout ce que la démonstration euclidienne mobilise, autrement dit si l'on dénombre les *éléments* de notre proposition 47, on obtient :

[2] Nous employons le mot « aire » par commodité, mais ce n'est pas le vocabulaire d'Euclide ; il n'y a en effet chez lui aucune mesure. Quand Euclide dit « figures égales », nous dirions aujourd'hui « figures de même aire », ce qui sous-entend qu'elles ne sont pas nécessairement superposables ; un carré de côté 4 et un rectangle de côtés 8 et 2, par exemple, sont égaux au sens d'Euclide.

- quatre demandes (postulats) sur cinq
- sept notions communes (axiomes) sur neuf
- quatre définitions sur vingt-trois
- 25 propositions sur les 46 qui précèdent.

Nous utiliserons les abréviations suivantes :

prop pour proposition
D pour demande (postulat)
NC pour notion commune (axiome)
Df pour définition.

Existence des figures

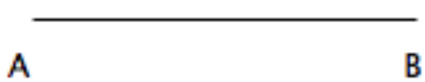
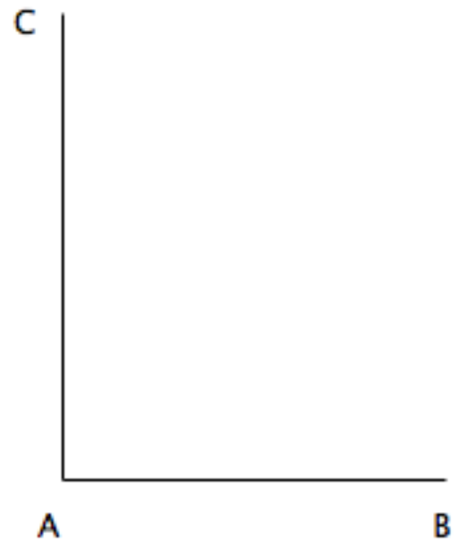
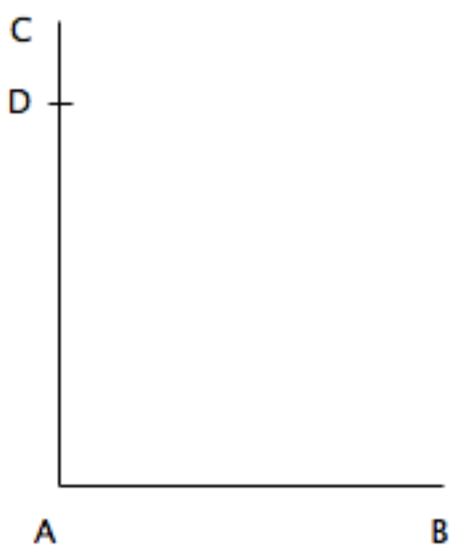
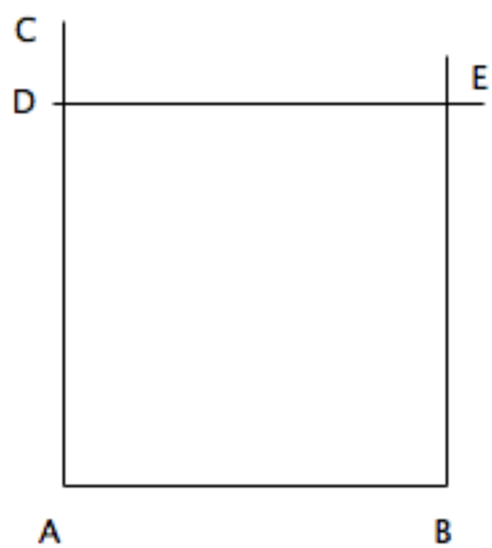
C'est un problème qui ne préoccupe pas les traités préeuclidiens ; et même si les figures sont parfois construites, comme dans les *sulbasutras*, on ne cherche pas à prouver que la construction donne la figure souhaitée. Dans le cours de la démonstration de la proposition 47, il y a trois sortes de constructions : celle des carrés sur les côtés du triangle rectangle ABC, celle de la parallèle à BD menée par A, et celle des segments FC, BK etc. Le tracé des segments FC et BK est assuré par la première demande (postulat) :

D1 « Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point »

La seconde constrtuction (mener une parallèle etc.) sera abordée lors de l'établissement de la construction des carrés.

1-Existence du « carré sur un côté » (prop 46).

C'est l'objet de la **prop. 46** (« Décrire un carré sur une droite donnée »), dont voici les étapes :

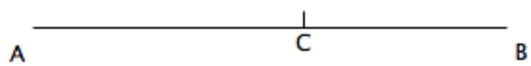
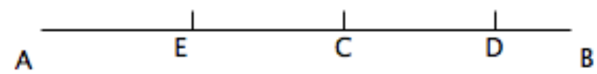
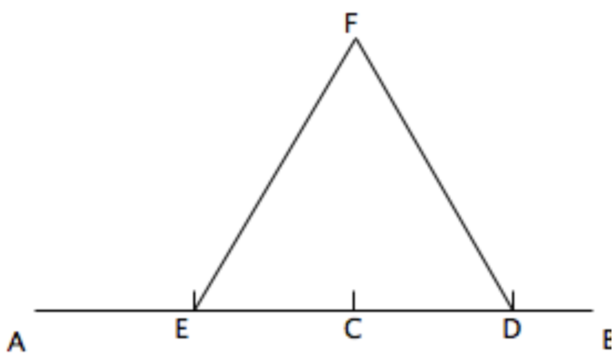
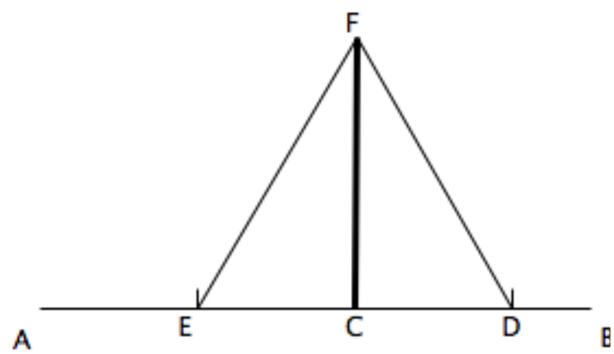
	
1 : « droite » AB sur laquelle il faut construire un carré	2 : mener la perpendiculaire AC à AB, possible d'après la **prop. 11**
	
3 : sur AC, porter AD = AB, possible d'après la **prop.2**	4 : mener DE parallèle à AB et BE parallèle à AD, possible d'après la **prop. 31**

Prop. 46 dépend donc de trois autres propositions (11, 2, et 31) que nous examinerons après ; voici d'abord la preuve que le parallélogramme construit ci-dessus est bien un carré :

Affirmations	Source
AB = DE et AD = BE	**Prop 34 (**égalités dans un parallélogramme)
AB = AD, donc les quatre côtés sont égaux	**NC 1** : « les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles »
∠BAD + ∠ADE = 2 droits Or ∠BAD = 1 droit, donc ∠ADE = 1 droit	**Prop 29 (**angles égaux formés par deux parallèles et une sécante) **NC 3** : « si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux »
∠BAD = ∠BED et ∠EBA = ∠ADE, donc les 4 angles sont chacun égaux à 1 droit. **Cqfd**	**Prop 34**

Encore deux autres propositions, 29 et 34. La première démontre les propriétés angulaires de deux parallèles et d'une sécante, la seconde démontre les égalités d'angles et de côtés dans un parallélogramme. Laissons-les pour l'instant pour regarder de plus près les deux « existences » fondamentales qui apparaissent dans la construction du carré : la perpendiculaire menée d'un point à une droite (prop 11) et la parallèle à une droite donnée passant par un point donné (prop 31) .

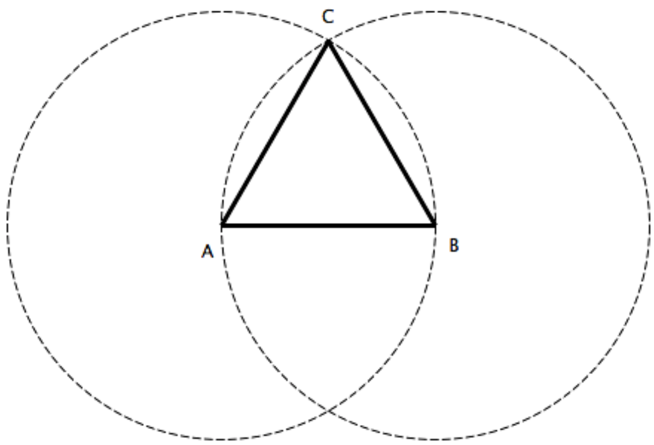
*2-Existence de la perpendiculaire à un segment menée d'un point de ce segment (**prop 11**).*

	
1 : soit à tracer une perpendiculaire en C à AB.	2 : prendre D sur AB, et placer CE = CD ; possible d'après **prop 2.**
	
3 : construire un triangle équilatéral FDE sur ED ; possible d'après **prop 1.**	4 : joindre FC ; possible d'après **D 1**.

Preuve que FC est la perpendiculaire cherchée : les triangles ECF et FCD sont égaux (**prop 8**), donc les angles ECF et FCD sont égaux, donc ils sont droits (**Df 10**).

La prop11 dépend donc des **prop 1, 2 et 8** :

Prop 1 : construire un triangle équilatéral sur la « droite » AB

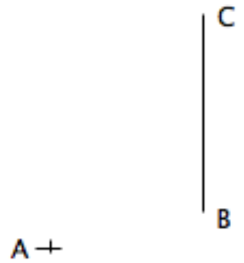
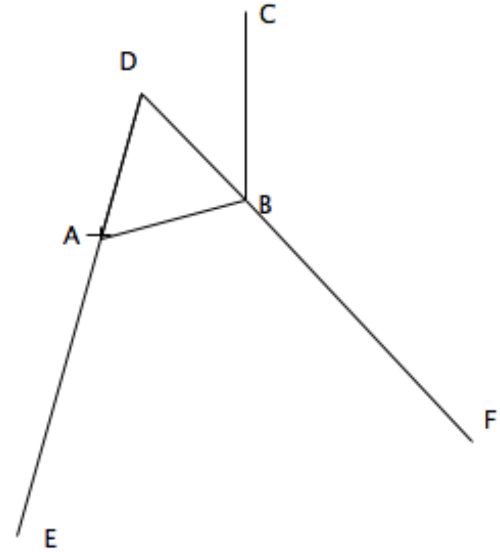
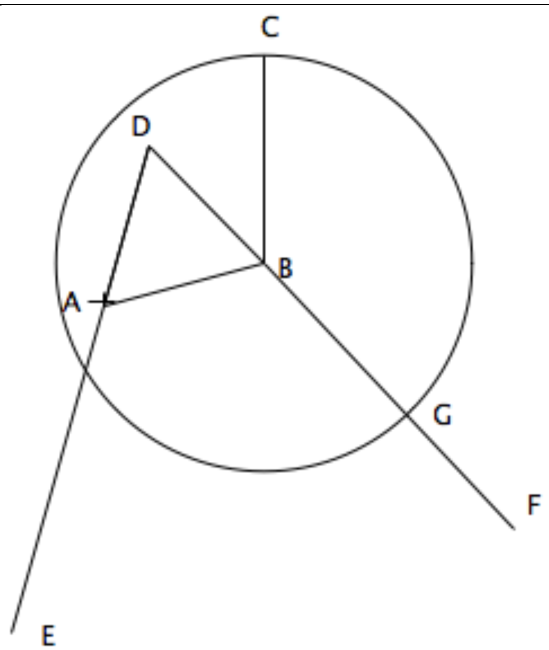
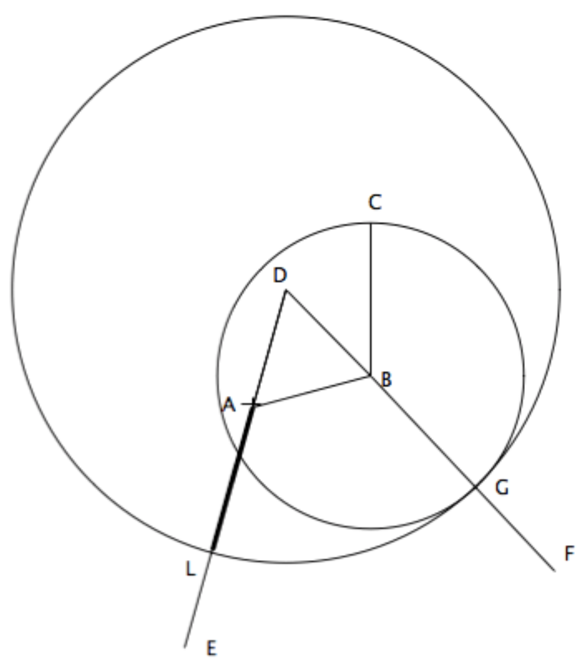


Construire deux cercles de centres A et B et de rayon AB (**D 3**), joindre CA et CB (**D 1**).

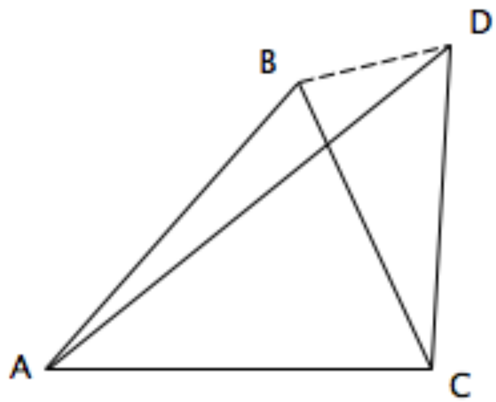
AC = AB et BC = BA donc AB = AC = BA (**NC 1**). Donc ABC est équilatéral (**Df 20**)

NC 1 : « Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles »

D 3 : « [Qu'il soit demandé] de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle »

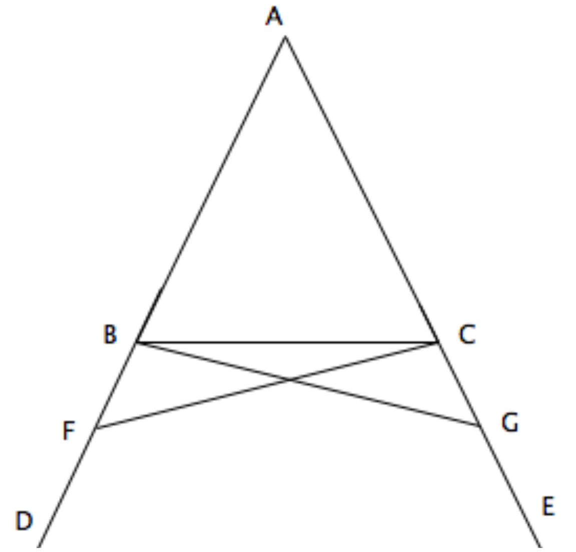
<table>
<tr><th colspan="2">Prop 2 : « placer, en un point donné, une droite égale à une droite donnée. »</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Soit à placer en A un segment égal à BC</td><td>1 : construire ABD équilatéral (prop 1), prolonger DA et DB. (D 2)
D 2 : « [Qu'il soit demandé] de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée »</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2 : tracer le cercle (B, BC) (D 3) qui coupe DB en G.</td><td>3 : tracer le cercle (D, DG) (D3) qui coupe AD en L. AL est le segment cherché.</td></tr>
</table>

Preuve : AL = DL-DA = DG-DB = BG = BC, avec **NC 1** et **NC 3** (« et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux »).

<table>
<tr><th colspan="2">Props 8 (et 7) : si deux triangles ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, ils sont égaux.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Supposons que AB = AD et CB = CD et que les deux triangles ne se superposent pas. Alors : ∠ABD = ∠BDA (prop 5), donc ∠BDA > ∠CBD (NC 8), donc a fortiori ∠BDC > ∠CBD. Mais d'autre part ∠BDC = ∠CBD (prop 5), « ce qui est impossible ». Cqfd
NC 8 : « le tout est plus grand que la partie ».</td></tr>
</table>

On notera qu'on a utilisé ici pour la première fois le **principe de non contradiction** : l'angle BDC ne peut être à la fois égal à l'angle CBD et plus grand que lui. Sans ce principe, par conséquent, on ne pourrait même pas justifier l'existence d'une perpendiculaire à une droite donnée !

La prop 8, à son tour, dépend de la prop 5 :

<table>
<tr><th colspan="2">Prop 5 : « les angles à la base des triangles isocèles sont égaux entre eux … »</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Soit ABC isocèle avec AB = AC et AF = AG (prop 3). Donc BF = CG (NC 3).
Les triangles ABG et ACF sont égaux (un angle égal compris entre deux côtés égaux, prop 4), donc BG = CF, ∠BFC = ∠BGC et ∠ABG = ∠ACF. Comme d'autre part BF = CG, les triangles BFC et BCG sont égaux (prop 4), donc ∠FCB = ∠GBC et par suite ∠ABC = ∠ACB (NC 3). Cqfd.</td></tr>
</table>

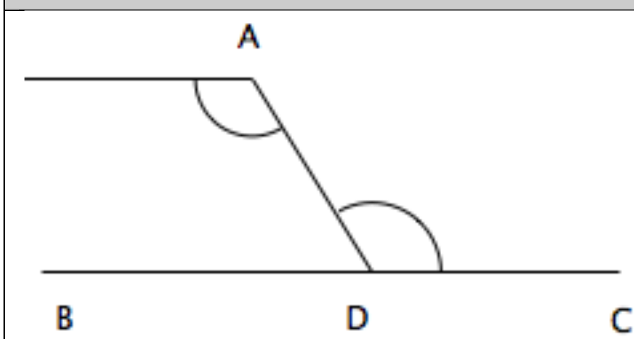
La **prop 5** dépend donc des **prop 3 et 4**.
La prop 3 concerne la possibilité de prendre F et G tels que AF = AG. Où est le problème ?
Pour F : il faut prolonger AB ; **D 2** le permet. On prend F sur ce prolongement.
Pour G : il faut prolonger AC (**D 2**), et prendre AG = AF. La **prop 2** vue plus haut permet de tracer, à partir d'un point, un segment égal à un segment donné ; mais ici, il faut en plus que le segment soit porté *sur une droite donnée (ici AE)*. Technique : à partir de A, tracer un segment égal à AF (**prop 2**), puis tracer le cercle de centre A et d'« intervalle » AF, qui coupe AE en G. Il est clair que dans le cas particulier de la prop 5, la prop 3 n'est pas vraiment utile.
Prop 4 : deux triangles ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun sont égaux entre eux.
La preuve se fait par ajustements, sans utiliser d'autres *éléments* que **NC 7** : « Les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles. ».

Ouf ! Nous sommes arrivés au bout … de la prop 11 seulement, qui permet la construction et assure donc l'existence d'une perpendiculaire à une droite à partir d'un point de cette droite. Et cette prop 11, à son tour, n'était que le début de la prop 46, qui elle-même n'était qu'une partie de la mise en place des objets nécessaires à la démonstration de la prop 47 !

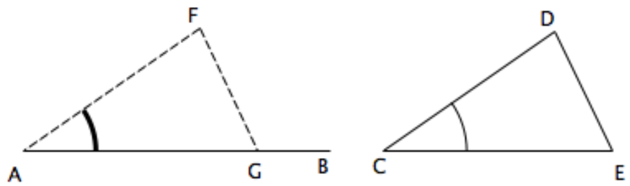
Eléments consommés par la proposition 11				
Eléments …	qui eux-mêmes ont pour éléments …	lesquels ont pour éléments …	qui ont pour éléments …	qui ont pour éléments
Prop 1	D 1, D 3, NC 1, Df 15, Df 20			
Prop 2	Prop1, D 1, D 2, D 3, NC 1, NC 3, Df 15, DF 20			
Prop 8	Prop 7, NC 7	Prop 5, NC 8	Prop 4, NC 3, D1	NC 7
			Prop 3	Prop 2, D 3, NC 1, Df 15
Df 10				
Df 20				

Poursuivons notre démarche régressive. Nous ne mentionnerons plus les demandes et notions communes déjà évoquées.

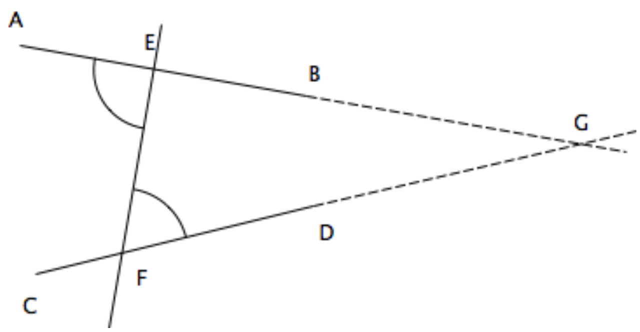
3- Existence de la parallèle à une droite donnée menée par un point donné (prop 31).

Prop 31 : « par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée ».	
 	Pour mener de A une parallèle à BC : prendre D sur BC, joindre AD, et construire ∠A = ∠D (**prop 23**). **Prop 27** assure que AE//BC.

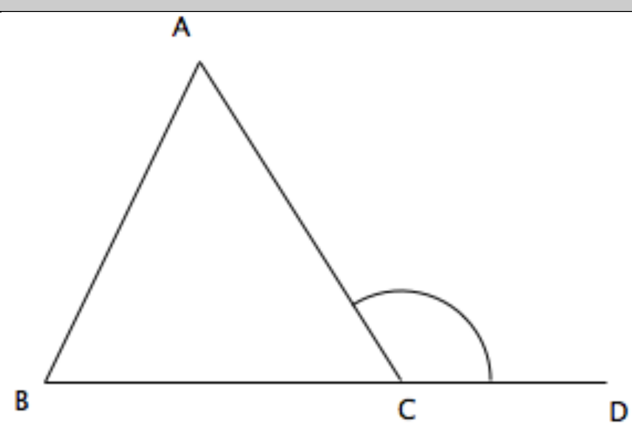
Prop 31 a donc besoin de prop 23 et de prop 27 :

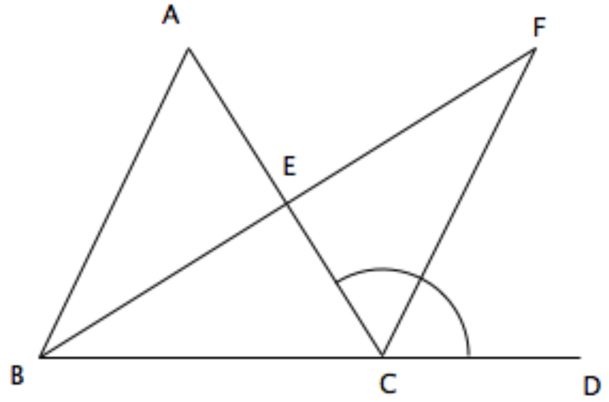
Prop 23 : construire un angle égal à un angle donné	
	Pour construire sur AB un angle égal à DCE, construire le triangle AGF avec des côtés égaux à ceux du triangle CED (**prop 22**)

La **prop 22**, construction d'un triangle de côtés donnés (avec la condition bien connue), est simple : elle ne demande que la possibilité de reporter des segments, assurée par **prop 2**.

Prop 27 : si deux droites et une sécante forment des angles alternes-internes égaux, alors, les droites sont parallèles	
	Si ∠AEF = ∠EFD et si AB et CD se coupaient en G, cela contredirait le théorème de l'angle extérieur (**prop 16**)

Prop 27, à son tour, nécessite donc **prop 16** :

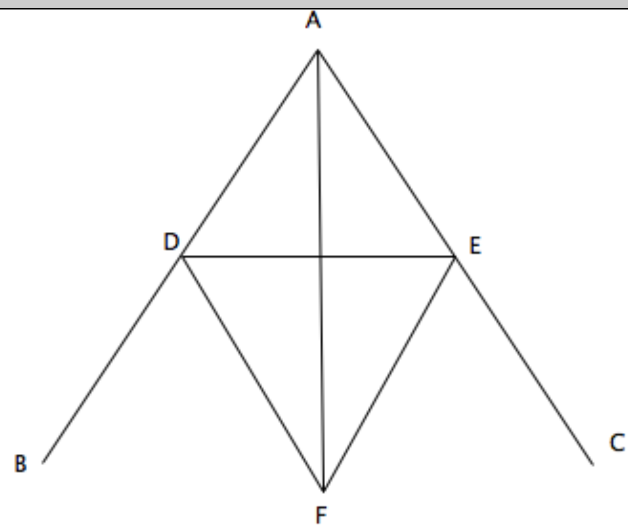
Prop 16 : théorème de l'angle extérieur	
	Le théorème affirme que l'angle ACD est plus grand que chacun des angles BAC et ABC.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td><u>Preuve</u> : couper AC en deux (prop 10) en E, prendre EF = BE.
∠AEB = ∠FEC (prop 15), donc les triangles AEB et FEC sont égaux (prop 4).
Donc CAB = ACF, et comme ∠ACD>∠ACF, ∠ACD>∠CAB.
En coupant BC en deux, on montrerait de même que ∠ACD>∠ABC. Cqfd</td>
</tr>
</table>

C’est donc au tour des **prop 10 et 15** de se rendre indispensable :

Prop 10 : « couper en deux parties égales une droite limitée donnée. »

Pour couper AB en deux, construire ABC équilatéral (**prop 1**) et la bissectrice de ACB (**prop 9**) qui coupe AB en D. Les triangles ACD et CDB sont égaux (**prop 4**), donc AD = DB.

<table>
<tr>
<th colspan="2">Prop 9 : « couper un angle rectiligne donné en deux parties égales ».</th>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Pour couper BAC en deux, prendre D sur AB et AE = AD (prop 3), construire le triangle équilatéral DEF (prop 1). AF est la bissectrice cherchée.
En effet DAF = AFE (prop 8), donc ∠DAF = ∠FAE.</td>
</tr>
</table>

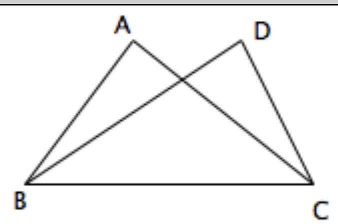
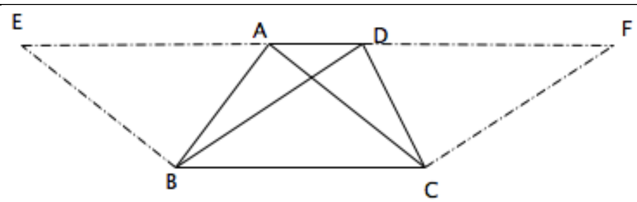
La **prop 15** établit que deux angles opposés par le sommet sont égaux, en s’appuyant sur la **prop 13** qui montre avec la **prop 11** qu’une droite « élevée sur » une autre produit des angles égaux à deux droits. Nous avons donc épuisé tous les éléments nécessaires à l’établissement de la prop 31. En résumé, et en ne tenant compte que des propositions :

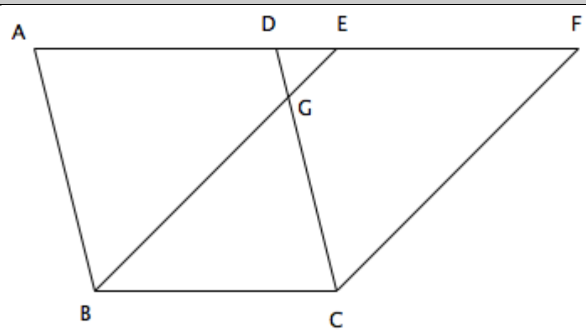
Eléments consommés par la proposition 31				
Proposition …	Issue de	Issue de	Issue de	Issue de
23	22	2	1	
27	16	2	1	
		15	13	11 (voir plus haut pour ses éléments)
		10	1	
			9	1
				3 issue de 2, issue de 1
				8 (voir plus haut pour ses éléments)
			4	
		4		

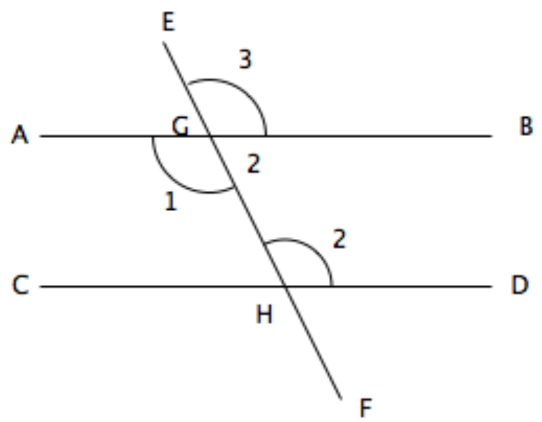
Après les constructions nécessaires à la preuve de la proposition 47, nous pouvons passer à la preuve proprement dite. Il ne nous reste plus qu'à démontrer que deux triangles de même base et situés entre les mêmes parallèles sont égaux (en aire).

Démonstration proprement dite

Il faut donc prouver que deux triangles de même base et situés entre les mêmes parallèles (nous dirions de même hauteur) sont égaux entre eux (**prop 37**). Nous procéderons à rebours, comme ci-dessus, mais de façon plus rapide, en particulier sans mentionner les propositions qui ont déjà été établies plus haut.

<table>
<tr><th colspan="2">Prop 37 : « Les triangles qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux .»</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Soient les triangles ABC et BDC de même base BC et situés entre les mêmes parallèles AD et BC.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Les parallélogrammes BEAC et BDFC sont égaux (prop 35) et les triangles ABC et BDC en sont les moitiés respectives (prop 34). Cqfd</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Prop 35 : « les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux. »</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Soient deux parallélogrammes ABCD et EBCF. Les triangles ABE et DCF sont égaux (props 29 et 34) ; si, à chacun d'entre eux, on enlève DEG et on rajoute BCG, on obtient les deux parallélogrammes ABCD et EBCF. Cqfd</td></tr>
</table>

Prop 29 : « une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits. »	
	Les droites AB et CD étant parallèles, il s'agit de montrer que $\angle G1 = \angle H2$, $\angle G3 = \angle H2$ et $\angle G2+\angle H2 = 2$ droits. Si par exemple $\angle G1>\angle H2$, on aura $\angle G1+\angle G2>\angle H2+\angle G2$, donc $\angle H2+\angle G2<2$ droits. Or cela contredirait la **demande 5**. La suite de la preuve est sans difficulté. **D5** : « [Qu'il soit demandé] que, si une droite tombant sur deux droites fait des angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits. »

On notera ici l'utilisation du fameux cinquième postulat **D5**. La **prop 34** établit que dans un parallélogramme, les côtés et les angles opposés sont égaux, et que la diagonale le coupe en deux parties égales.

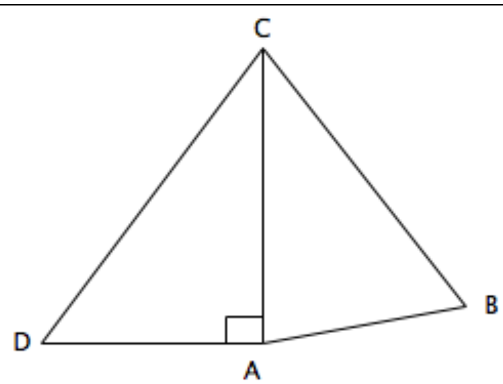
La proposition 47 est donc démontrée. Passons à la réciproque.

La proposition 48 du Livre I.

Enoncé

« Si, dans un triangle, le carré sur l'un des côtés est égal aux carrés sur les deux côtés restants du triangle, l'angle contenu par les deux côtés restants du triangle est droit. »

Démonstration



Soit ACB tel que $CB^2 = AC^2+AB^2$.
On construit le triangle rectangle ACD tel que AD = AB (**props 2 et 11**). D'après **prop 47**, on a : $DC^2 = DA^2+AC^2$, donc $DC^2 = CB^2$, donc DC = CB et par suite les triangles DAC et CAB sont égaux (**prop 8**).
Donc ∠CAB = ∠CAD = 1 droit. **Cqfd**

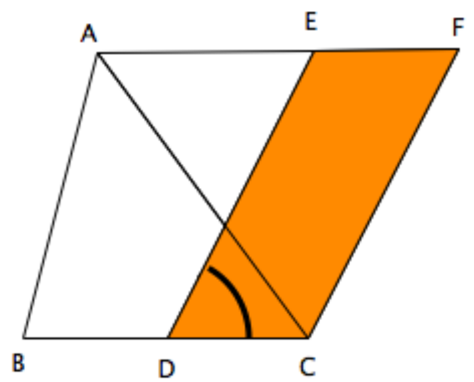
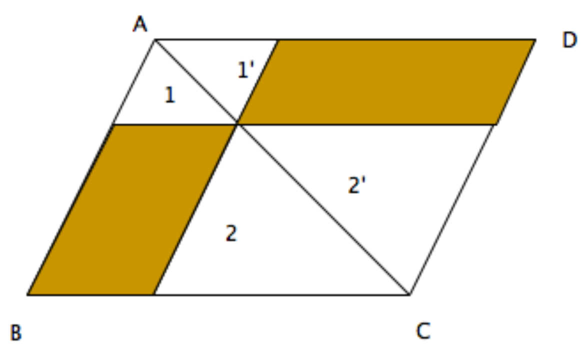
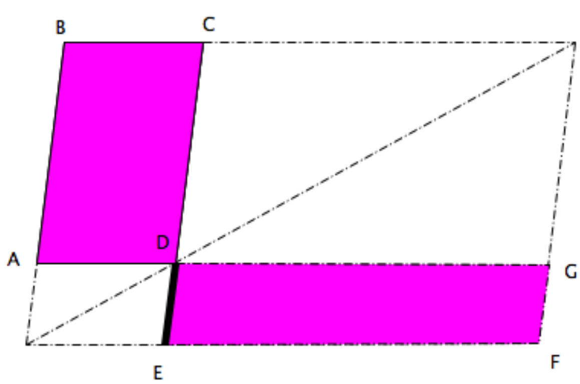
Ainsi s'achève la démonstration du théorème « de Pythagore ».

Quadrature d'une figure rectiligne quelconque (proposition 14 du Livre II)

En disant que l'aire d'une figure vaut par exemple 9 cm^2, on affirme que cette figure est égale à un carré de côté 3 cm ; dans ce sens, on a réalisé la *quadrature* de la figure de départ. Lorsque Leibniz et Newton découvrent la façon de calculer l'aire « sous la courbe », ils parlent eux aussi de quadrature des lignes courbes. **Mais le même mot signifie aussi construction géométrique (à la règle et au compas pour les Grecs) d'un carré égal à une figure rectiligne donnée.**

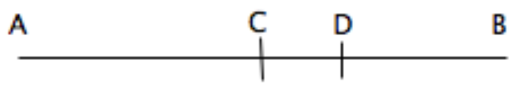
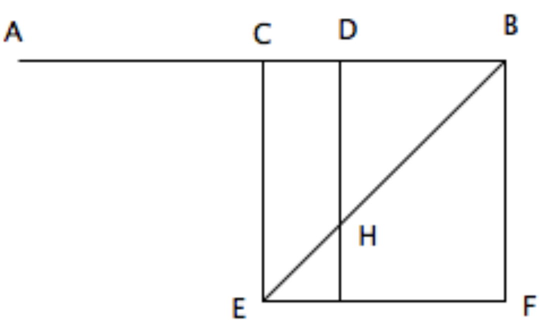
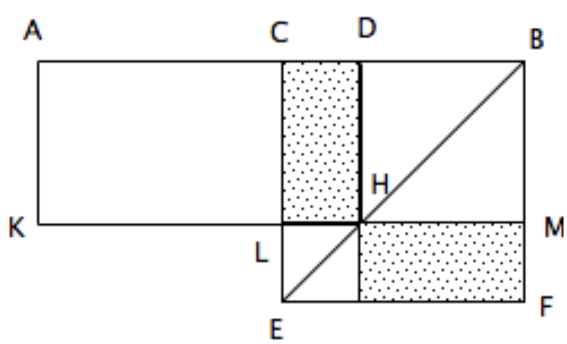
Si l'on croit, comme c'était implicitement le cas dans les mathématiques préeuclidiennes, que toutes les grandeurs de même genre (deux longueurs, deux aires, deux volumes) sont commensurables (i.e. : l'une est une fraction p/q de l'autre, où p et q sont des nombres entiers), alors la possibilité du calcul de l'aire implique la possibilité de la construction géométrique du carré égal. Mais après la découverte de l'incommensurabilité de certaines grandeurs, au V^e^ siècle avant notre ère, certains calculs d'aires sont exclus puisque l'idée de nombre irrationnel n'existe pas ; il ne reste que l'espoir de la construction géométrique du carré égal, à défaut de son calcul. Par exemple, je peux construire le carré égal au rectangle de côté 1 et d, où d est la longueur de la diagonale du carré de côté 1, mais je ne peux pas calculer son aire puisque d, notre $\sqrt{2}$, est inexprimable sous la forme p/q.

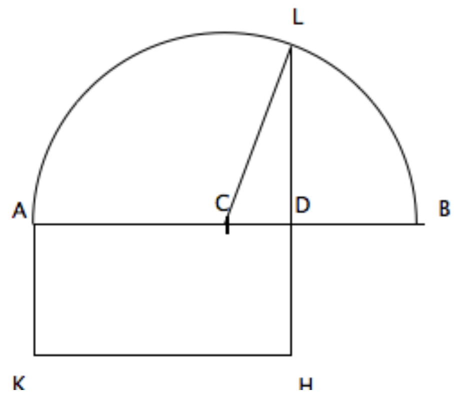
Chez Euclide, il n'y aura donc aucun calcul d'aire, mais seulement des quadratures au sens de constructions géométriques. Les seuls textes préeuclidiens à se préoccuper de constructions sont les *sulbasutras* ; on y construit le carré lui-même, le carré égal à des sommes ou différences de carrés, et le carré égal à un rectangle. Chez Euclide, on réalise la quadrature d'une figure rectiligne quelconque. Voici les maillons essentiels de la chaîne déductive qui y conduit, en deux étapes : construction « dans un angle donné, d'un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée » (prop I-45) et transformation de ce parallélogramme (où l'angle donné est droit) en un carré (prop II-14).

Construction d’un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée.	
Prop I-42 : « Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à un triangle donné. »  	Triangle donné : ABC. On prend le milieu D de BC, et on mène la parallèle AE à BC. Angle donné : porté en CDE. Le parallélogramme DECF est égal au triangle ABC.
Prop I-43 : « Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux. »  	Les triangles ABC et ACD sont égaux ; si on leur enlève des triangles égaux, 1 et 1’, 2 et 2’, les restes sont égaux. CQFD
Prop I-44 : « Sur une droite donnée et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné. »  	On construit d’abord un parallélogramme ABCD égal au triangle donné (**prop I-42**), puis un second DEFG « appliqué sur » DE et égal au premier. La construction est indiquée par les lignes en pointillés. On a bien ABCD = DEFG d’après **prop I-43**.

Prop I-45 : « Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée. »	On décompose la figure en triangles. On construit le parallélogramme ABCD égal au premier triangle (**prop I-42**), puis le parallélogramme DCEF « appliqué sur » DC et égal au second triangle (**prop I-44**) et ainsi de suite.

On a donc construit un parallélogramme sous un angle donné, égal à une figure rectiligne quelconque ; en choisissant l'angle donné droit, on obtient un rectangle. Pour réaliser la quadrature de la figure de départ, il reste à transformer ce rectangle en carré. La technique est la même que dans les *sulbasutras* : transformer le rectangle en gnomon (différence de deux carrés) **(prop II-5**) puis celui-ci en carré (**prop II-14**), grâce au théorème de l'hypoténuse.

Construction d’un carré égal à un rectangle donné (Props II-5 et II-14)	
Prop II-5 : « Si une ligne droite est coupée en segments égaux et inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière pris avec le carré sur la droite comprise entre les points de section est égal au carré sur la moitié de la droite. »	
	Segments égaux : AC et CB. Segments inégaux : AD et DB. Il faut montrer que le rectangle sur AD et DB est égal au carré sur DB, i.e. que $AD \times DB = CB^2$.
	On construit le carré CFBE sur CB et la parallèle DH à EC.
	Mener la parallèle HK à AB et la parallèle AK à DH. Dans la suite, (PQ) désignera le rectangle de diagonale PQ. On a : (AH) = (AL)+(CH). Mais (AL) = (CM) et (CH) = (HF) (**prop I-43**), donc (AL)+(CH), i.e. (AH), est égal au gnomon (CM)+(HF). Finalement, (AH)+(HE) = (CM)+(HF)+(HE) = (BE). CQFD

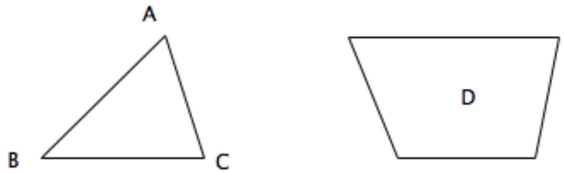
Prop II-14 : « Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée. »  	On construit le rectangle (AH) égal à la figure rectiligne donnée (**prop I-45**). On porte DB = DH et le milieu C de AB ; on trace le cercle de centre C et de rayon CB. On a : (AH) + carré sur CD = carré sur CB (**prop II-5**). Donc (AH) = carré sur CB - carré sur CD = carré sur CL – carré sur CD = carré sur LD (**prop I-47**). Ce qu'il fallait construire.

Ainsi s'achève la quadrature d'une figure rectiligne quelconque.

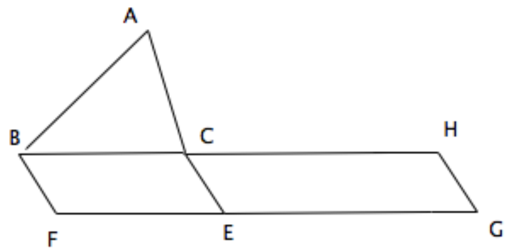
Construction d'une figure semblable à une figure rectiligne donnée et égale à une autre figure rectiligne donnée (prop VI-25).

Euclide résout ici d'une façon générale le problème résolu par les *sulbasutras* dans un cas particulier : construire une figure d'une part semblable à l'autel en forme de faucon et d'autre part égale au carré d'aire 8,5 *purusas* carrés. Mais il y a une autre différence bien plus importante entre les *sulbasutras* et les *Eléments* : alors que le rapport de similitude, à savoir 8,5/7,5 = 17/15, dirige la construction des *sulbasutras*, celle d'Euclide se fonde sur la théorie abstraite de la similitude (Livre VI) qui elle-même se fonde sur la théorie des rapports de grandeurs (Livre V). Cette dernière, à son tour, est indépendante de tout nombre (rationnel) ; et pour cause : on sait depuis un siècle ou un siècle et demi, en Grèce, qu'il existe des grandeurs incommensurables.

Il serait beaucoup trop long, dans le cadre de cet exposé, de suivre la construction euclidienne jusque dans ses fondements ultimes, comme nous l'avons fait pour le théorème de l'hypoténuse. Nous nous contenterons donc d'un aperçu, mais je ne saurais assez conseiller à toute personne intéressée de lire au moins le début du Livre V, absolument génial, et que nous devons dans son contenu à Eudoxe (maturité vers -350), d'après Proclus.

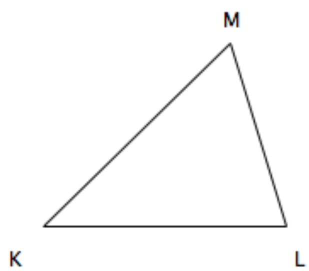


Soit à construire une figure semblable à ABC et égale à D.



On construit sur BC le parallélogramme BCEF égal à ABC (**prop I-44**), puis sur CE et dans l'angle CEG un autre parallélogramme CHGE égal à la figure D (**prop I-45**)

C'est à partir de là qu'intervient la théorie des proportions : d'après la **prop II-14**, étant donné le rectangle de côtés BC et CH, on sait construire KL tel que $BC \times CH = KL^2$. Donc KL est à CH comme CH est à BC, i.e. KL est moyenne proportionnelle entre BC et CH.



On construit enfin le triangle KLM semblable à ABC : KLM est la figure cherchée.

Preuve en termes actuels :

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta KLM} = \left(\frac{BC}{KL}\right)^2$$

Mais comme $\frac{BC}{KL} = \frac{KL}{CH}$, on a $\left(\frac{BC}{KL}\right)^2 = \frac{BC}{CH}$.

Mais $\frac{BC}{CH} = \frac{\text{parall.BCFE}}{\text{parall.CHEG}} = \frac{\Delta ABC}{\text{fig.D}}$

D'où finalement : $\frac{\Delta ABC}{\Delta KLM} = \frac{\Delta ABC}{\text{fig.D}}$,

donc ΔKLM = figure D.

Notations : ΔABC signifie l'aire du triangle ABC, parall.BFCE signifie l'aire du parallélogramme BFCE, et fig.D signifie l'aire de la figure D.

Pour en savoir plus

Pour une présentation des *Eléments*, on pourra consulter l'excellente introduction de Maurice Caveing à (Euclide 1990). Pour l'histoire des mathématiques grecques (Caveing 97-98) et (Heath 81) font autorité. Une analyse du changement qualitatif entre les mathématiques préeuclidiennes et les *Eléments,* en liaison avec la naissance de la philosophie*,* est proposée dans le chapitre 10 de (Keller 2006).

Texte des *Eléments* : la traduction de Bernard Vitrac, accompagnée de nombreux commentaires et éclaircissements, est une œuvre de référence. De même pour la traduction de Heath en anglais. Les fragments conservés d'Hippocrate de Chio se trouvent dans (Thomas, 1980).

Caveing, Maurice. 1997. *La figure et le nombre. Recherches sur les premières mathématiques des Grecs*. Lille: Presses Universitaires du Septentrion.

———. 1998. *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*. Lille: Presses universitaires du Septentrion.

Euclid. 1956. *The Thirteen Books of the Elements*. Translated by T. L. Heath. 2° ed. 3 vols. New York: Dover.

Euclide. 1990. *Les Eléments. Volume 1. Introduction générale, livres I à IV*. Trad. B. Vitrac. Paris: PUF.

———. 1994. *Les Eléments. Volume 2. Livres V à IX*. Trad. B. Vitrac. Paris: PUF.

———. 1998. *Les Eléments. Volume 3. Livre X*. Trad. B. Virtrac. Paris: PUF.

———. 2001. *Les Eléments. Volume 4. Livres XI-XIII*. Trad. B. Vitrac. Paris: PUF.

Heath, Thomas. 1981. *Aristarchus of Samos. The Ancient Copernicus*. New York: Dover.

———. 1980. *A History of Greek Mathematics*. 2 vols. New York: Dover.

Keller, Olivier. 2006. *La figure et le monde. Une archéologie de la géométrie. Peuples paysans sans écriture et premières civilisations*. Paris: Vuibert.

Proclus. 1948. *Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide*. Trad. by P. V. Ecke. Bruges: Desclée de Brouwer et Cie. Fac-simile Irem de Lille.

Thomas, Ivor. 1980. *Greek Mathematical Works. I: Thales to Euclid*. Translated by I. Thomas. Cambridge: Harvard University Press.

-oOo-