Épreuve de Mathématiques 2011

Correction

Première partie

A.1. Pour tout réel $\lambda \neq 0$, f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_\lambda{}'(x) = -\lambda\, e^{-\lambda\, x}$.

Comme $e^a > 0$ pour tout réel a, alors $f_\lambda{}'(x)$ est du signe de $-\lambda$.

On en déduit que f_λ est strictement croissante si $\lambda < 0$ et strictement décroissante si $\lambda > 0$.

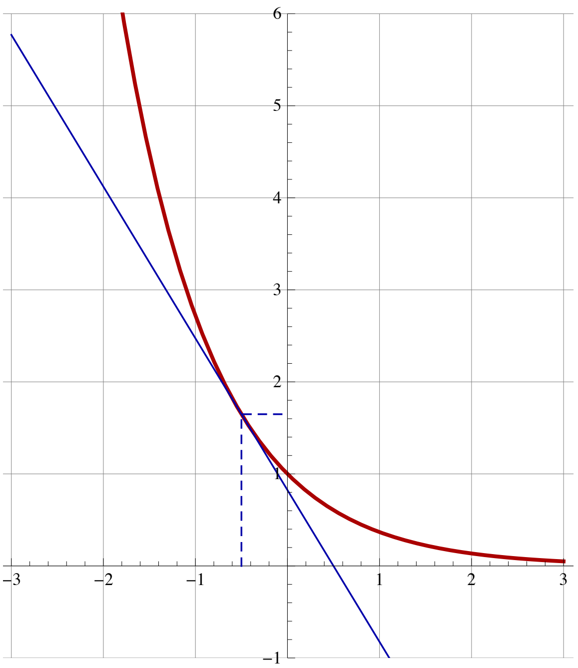
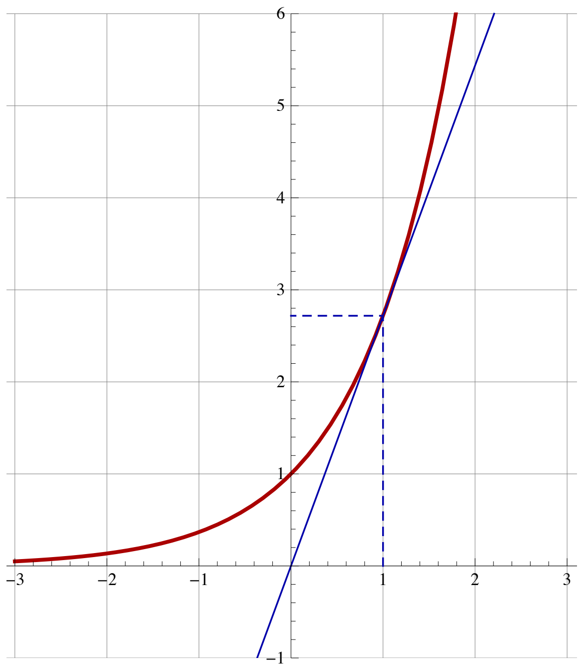
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

L'équation de la tangente $T_{\lambda,\,a}$ à $\mathscr{C}_\lambda$ au point A d'abscisse a est donnée par $y = f_\lambda{}'(a)\,(x - a) + f_\lambda(a)$.

On obtient donc $y = -\lambda\, e^{-\lambda\, a}(x - a) + e^{-\lambda\, a}$ d'où $y = -\lambda\, e^{-\lambda\, a}\, x + e^{-\lambda\, a}(1 + a\,\lambda)$.

3.a. La courbe $\mathscr{C}_\lambda$ est au-dessus de sa tangente $T_{\lambda,\,a}$ au point A, quel que soit le signe de λ.

b. On obtient deux allures de courbes suivant le signe de λ :

$\lambda>0$	$\lambda<0$
	

B.1.a. Soit un réel $\alpha > 0$.

On a $\mathrm{A}_\lambda(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha f_\lambda(t)\, dt$ puisque $f_\lambda(x) \geq 0$ pour tout réel $x \in [0;\alpha]$ et f_λ est continue sur $[0;\alpha]$.

Remarquons alors qu'une primitive de f_λ sur $[0;\alpha]$ est donnée par $x \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\, x}$.

On obtient donc $\mathrm{A}_\lambda(\alpha) = \left[-\dfrac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\, t}\right]_0^\alpha = -\dfrac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\,\alpha} - \left(-\dfrac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\times 0}\right) = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\,\alpha}\right)$ u.a.

b. Soit $\lambda > 0$, alors $-\lambda < 0$ et par suite $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} -\lambda\,\alpha = -\infty$.

Donc comme $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$, par composition, on obtient $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} e^{-\lambda\alpha}=0$.

On en déduit $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda\alpha}\right)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Soit $\lambda<0$, alors $-\lambda>0$.

Ainsi $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} -\lambda\,\alpha=+\infty$ et comme $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$, par composition de limites, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} e^{-\lambda\alpha}=+\infty$.

Par suite $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}(1-e^{-\lambda\alpha})=-\infty$ et comme $\dfrac{1}{\lambda}<0$ alors $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda\alpha}\right)=+\infty$.

Finalement $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A_\lambda(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\text{ si }\lambda>0\\ +\infty\text{ si }\lambda<0\end{cases}$.

2.a. Les fonctions $t\mapsto t\,f_\lambda(t)$ et $t\mapsto t^2\,f_\lambda(t)$ sont continues sur $[0;\alpha]$ pour tout réel $\alpha>0$ comme produit de fonctions continues sur $[0;\alpha]$ donc $I_\lambda(\alpha)=\int_0^\alpha t\,f_\lambda(t)\,dt$ et $J_\lambda(\alpha)=\int_0^\alpha t^2\,f_\lambda(t)\,dt$ existent.

b. Pour $I_\lambda(\alpha)$:

La formule d'intégration par parties donne:

$I_\lambda(\alpha)=\left[t\times\left(-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)\right]_0^\alpha-\int_0^\alpha 1\times\left(-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)dt$ d'où $I_\lambda(\alpha)=\left(-\dfrac{\alpha}{\lambda}e^{-\lambda\alpha}-\left(-\dfrac{0}{\lambda}e^{-\lambda\times 0}\right)\right)+\dfrac{1}{\lambda}\int_0^\alpha f_\lambda(t)\,dt$ et finalement $I_\lambda(\alpha)=-\dfrac{\alpha}{\lambda}e^{-\lambda\alpha}+\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda\alpha}\right)\right)$ d'où $I_\lambda(\alpha)=\dfrac{1-e^{-\lambda\alpha}(1+\alpha\lambda)}{\lambda^2}$.

Calculons $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\lambda(\alpha)$.

◊ Soit $\lambda>0$.

On a pour tout réel $\alpha>0$, $I_\lambda(\alpha)=\dfrac{1-e^{-\lambda\alpha}+(-\lambda\,\alpha)\,e^{-\lambda\alpha}}{\lambda^2}$.

Or comme $-\lambda<0$, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} -\lambda\,\alpha=-\infty$ et on sait que $\lim\limits_{X\to-\infty} X\,e^{X}=0$ donc par composition $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}(-\lambda\,\alpha)\,e^{-\lambda\alpha}=0$.

On a montré que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}(1-e^{-\lambda\alpha})=1$.

Par conséquent, on obtient $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1-e^{-\lambda\alpha}}{\lambda^2}+\dfrac{(-\lambda\,\alpha)\,e^{-\lambda\alpha}}{\lambda^2}=\dfrac{1}{\lambda^2}$ d'où $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\lambda(\alpha)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

◊ Soit $\lambda<0$.

On a montré que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} e^{-\lambda\alpha}=+\infty$.

De plus $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}(1+\lambda\,\alpha)=-\infty$ d'où $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} 1-e^{-\lambda\alpha}(1+\lambda\,\alpha)=+\infty$.

Finalement $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1-e^{-\lambda\alpha}(1+\alpha\,\lambda)}{\lambda^2}=+\infty$ puisque $\dfrac{1}{\lambda^2}>0$. On a donc dans ce cas $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\lambda(\alpha)=+\infty$.

Pour $J_\lambda(\alpha)$:

La formule d'intégration par parties donne:

$J_\lambda(\alpha)=\left[t^2\times\left(-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)\right]_0^\alpha-\int_0^\alpha 2\,t\times\left(-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)dt=\left[t^2\times\left(-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)\right]_0^\alpha+\dfrac{2}{\lambda}I_\lambda(\alpha)$.

On en déduit donc $J_\lambda(\alpha)=-\dfrac{\alpha^2}{\lambda}e^{-\lambda\alpha}+\dfrac{2}{\lambda}\times\dfrac{1-e^{-\lambda\alpha}(1+\alpha\,\lambda)}{\lambda^2}=\dfrac{2-e^{-\lambda\alpha}(2+2\,\alpha\,\lambda+\alpha^2\,\lambda^2)}{\lambda^3}$.

Calculons $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} J_\lambda(\alpha)$.

◊ Soit $\lambda>0$.

Comme $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\lambda(\alpha)=\dfrac{1}{\lambda^2}$ alors $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{2}{\lambda}I_\lambda(\alpha)=\dfrac{2}{\lambda^3}$.

On a d'autre part $\frac{\alpha^2}{\lambda} e^{-\lambda\alpha} = \frac{(-\lambda\alpha)^2 e^{-\lambda\alpha}}{\lambda^3}$ pour tout réel α.

Comme $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} -\lambda\alpha = -\infty$ et comme $\lim\limits_{X\to-\infty} X^2 e^X = 0$, alors on obtient $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} (-\lambda\alpha)^2 e^{-\lambda\alpha} = 0$.

Par conséquent, on en déduit $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} -\frac{\alpha^2}{\lambda} e^{-\lambda\alpha} + \frac{2}{\lambda} I_\lambda(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \frac{2}{\lambda} I_\lambda(\alpha) = \frac{2}{\lambda^3}$. Finalement $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} J_\lambda(\alpha) = \frac{2}{\lambda^3}$.

◊ Soit $\lambda < 0$.

On sait que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} e^{-\lambda\alpha} = +\infty$.

comme $\lambda^2 > 0$, on a $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} (2 + 2\lambda\alpha + \lambda^2\alpha^2) = +\infty$ (comme polynôme du second degré en α).

Par produit, on obtient alors $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} 1 - e^{-\lambda\alpha}(2 + 2\lambda\alpha + \lambda^2\alpha^2) = -\infty$.

Enfin comme $\lambda^3 < 0$, alors $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda\alpha}(2 + 2\lambda\alpha + \lambda^2\alpha^2)}{\lambda^3} = +\infty$.

Finalement $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} J_\lambda(\alpha) = +\infty$.

C. Soit λ est un réel strictement positif.

1.a. Comme $e^a > 0$ pour tout réel a, alors $e^{-\lambda x} > 0$ pour tout réel $x \geq 0$ et comme $\lambda > 0$ alors $\varphi_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \geq 0$ pour tout réel $x \geq 0$.

La fonction φ_λ est clairement continue sur $[0; +\infty[$ puisque composée des fonctions $x \mapsto -\lambda x$ et $x \mapsto e^x$ continues sur $\mathbb{R}$.

Enfin, on remarque $\varphi_\lambda = \lambda f_\lambda$ donc pour tout réel $x > 0$, $\int_0^x \varphi_\lambda(t)\,dt = \lambda \int_0^x f_\lambda(t)\,dt$.

Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \varphi_\lambda(t)\,dt = \lambda \times \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1$ d'après la question **B.1.b.**

La fonction φ_λ vérifie les 3 conditions données: φ_λ est une densité de probabilité sur $[0; +\infty[$.

b. Soit X_λ une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité φ_λ.

La variable aléatoire X_λ suit la loi exponentielle de paramètre λ encore appellée loi de durée de vie sans viellissement.

2.a. On a $\lambda > 0$. On sait donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} I_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2} \in \mathbb{R}$.

On remarque alors que $E(X_\lambda) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\varphi_\lambda(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \lambda \int_0^x t\,f_\lambda(t)\,dt = \lambda \lim\limits_{x\to+\infty} I_\lambda(\alpha)$.

Donc $E(X_\lambda) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\varphi_\lambda(t)\,dt$ existe puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} I_\lambda(x)$ existe et on a $E(X_\lambda) = \lambda \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$.

b. Le temps d'attente en minutes à un standard téléphonique est une variable aléatoire Y_λ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

L'espérance $E(Y_\lambda)$ représente alors le temps moyen d'attente à ce standard.

Sachant que ce temps moyen est de 5 minutesm déterminer la probabilité d'attendre encore 5 minutes, sachant qu'on a déjà attendu 2 minutes.

Y_λ suit une loi exponentielle de paramètre λ donc pour tout intervalle $[a; b]$ inclus dans $[0; +\infty[$, $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_\lambda(t)\,dt$.

Déterminons λ.

On a montré précédemment que $E(Y_\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ et on nous dit que ce temps d'attente moyen est de 5 minutes.

On en déduit $\frac{1}{\lambda} = 5$ d'où $\lambda = \frac{1}{5}$.

Enfin la probabilité d'attendre encore 5 minutes, sachant qu'on a déjà attendu 2 minutes est donc la probabilité conditionnelle $P_{(X\geq 2)}(2 \leq X \leq 5) = \dfrac{P(2 \leq X \leq 5)}{P(X \geq 2)}$ puisque $(2 \leq X \leq 5) \bigcap (X \geq 2) = (2 \leq X \leq 5)$.

Or on a:

- $P(2 \leq X \leq 7) = \displaystyle\int_2^7 \varphi_\lambda(t)\, dt = \frac{1}{5} \times \left[-5\, e^{-\frac{1}{5}t}\right]_2^7 = e^{-\frac{2}{5}} - e^{-\frac{7}{5}} = e^{-\frac{2}{5}}(1 - e^{-1})$
- $P(X \geq 2) = P(\overline{X \leq 2}) = 1 - P(0 \leq X \leq 2) = 1 - \displaystyle\int_0^2 \varphi_\lambda(t)\, dt = \frac{1}{5} \times \left[-5\, e^{-\frac{1}{5}t}\right]_0^2 = 1 - \left(1 - e^{-\frac{2}{5}}\right) = e^{-\frac{2}{5}}$.

La probabilité cherchée est donc $p = \dfrac{e^{-\frac{2}{5}} - e^{-\frac{7}{5}}}{e^{-\frac{2}{5}}} = 1 - e^{-1}$.

Remarque:
Sachant que l'on est en présence de la loi de durée de vie sans viellissement, la probabilité d'attendre encore 5 minutes ne dépend pas de combien de minutes, on a déjà attendu.
Donc la probabilité cherchée est $P(0 \leq X \leq 5) = 1 - e^{-1}$.

3. On a pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x t^2\, \varphi_\lambda(t)\, dt = \lambda \int_0^x t^2\, f_\lambda(t)\, dt = \lambda\, J_\lambda(x)$.

Alors comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} J_\lambda(x) = \frac{2}{\lambda^3} \in \mathbb{R}$, on en déduit que $V(X_\lambda)$ existe et de plus $V(X_\lambda) = \lambda \times \dfrac{2}{\lambda^3} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Deuxième partie

A.1. Parité:
Pour tout réel $\lambda \neq 0$, al fonction g_λ est paire.
En effet pour tout réel x, $-x$ est réel et de plus $g_\lambda(-x) = e^{-\lambda(-x)^2} = e^{-\lambda x^2} = g_\lambda(x)$.
Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Limites: On différentie les cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.

◊ Pour $\lambda > 0$: $-\lambda < 0$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (-\lambda\, x^2) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (-\lambda\, x^2) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$.
Finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_\lambda(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g_\lambda(x) = 0$.
La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à Γ_λ en $+\infty$ et en $-\infty$.

◊ Pour $\lambda < 0$: $-\lambda > 0$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (-\lambda\, x^2) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x^2} = +\infty$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (-\lambda\, x^2) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-\lambda x^2} = +\infty$.
Finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_\lambda(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g_\lambda(x) = +\infty$.

Variations:
Pour tout réel $\lambda \neq 0$, la fonction g_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée des fonctions $x \mapsto -\lambda\, x^2$ et $x \mapsto e^x$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g_\lambda'(x) = -2\,\lambda\, x\, e^{-\lambda x^2}$.
Comme une exponentielle est toujours strictement positive, on sait donc que $g_\lambda'(x)$ est du signe de $-2\,\lambda\, x$ sur $\mathbb{R}$.
On différentie alors les cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.

◊ Pour $\lambda > 0$: $-\lambda < 0$ donc $-2\,\lambda\, x$ est du signe opposé à celui de x .
On en déduit $g_\lambda'(x) < 0$ pour $x > 0$ et $g_\lambda'(x) > 0$ pour $x < 0$.
La fonction g_λ est donc strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

◊ Pour $\lambda < 0$: $-\lambda > 0$ donc $-2\,\lambda\, x$ est du signe de x .
On en déduit $g_\lambda'(x) < 0$ pour $x < 0$ et $g_\lambda'(x) > 0$ pour $x > 0$.

La fonction g_λ est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2.a. On a vu que $g_\lambda'(x) = -2\,\lambda\,x\,e^{-\lambda\,x^2}$ pour tout réel x. g_λ' est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $g_\lambda''(x) = -2\,\lambda\,e^{-\lambda\,x^2} - 2\,\lambda\,x \times (-2\,\lambda\,x\,e^{-\lambda\,x^2}) = 2\,\lambda\,e^{-\lambda\,x^2}(2\,\lambda\,x^2 - 1)$.

b. On résout l'équation $g_\lambda''(x) = 0$ c'est à dire $2\,\lambda\,e^{-\lambda\,x^2}(2\,\lambda\,x^2 - 1) = 0$.

Or comme $\lambda \neq 0$ et comme $e^{-\lambda\,x^2} > 0$ pour tout réel x, cela revient donc à résoudre l'équation $2\,\lambda\,x^2 - 1 = 0$.
On distingue les cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.

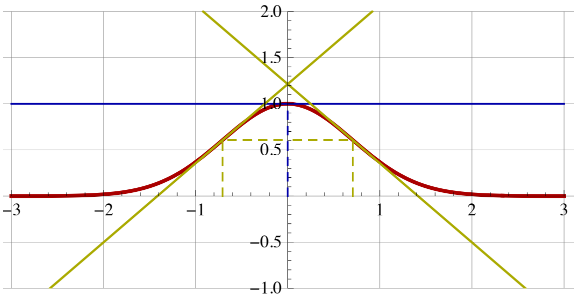
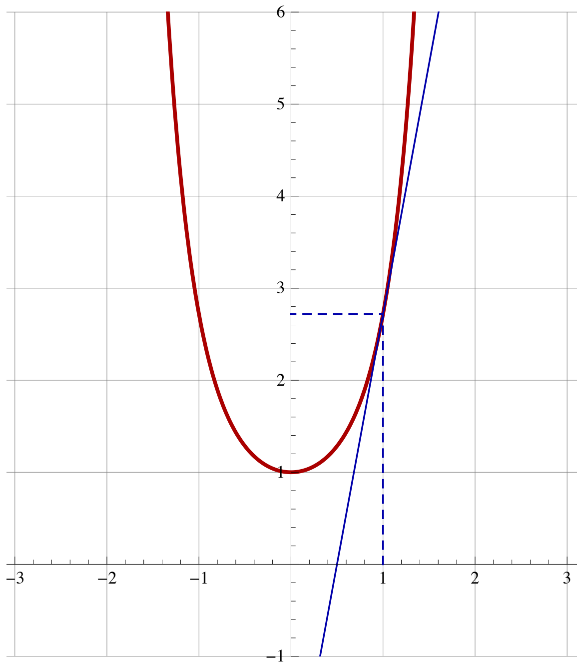
◊ Pour $\lambda < 0$.
Alors $2\,\lambda\,x^2 \leq 0$ pour tout réel x d'où $(2\,\lambda\,x^2 - 1) \leq -1 < 0$.
L'équation $2\,\lambda\,x^2 - 1 = 0$ n'a donc pas de solution réelle.
L'équation $g_\lambda''(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.
La courbe Γ_λ ne présente aucun point où elle traverse sa tangente.
On peut vérifier que la courbe Γ_λ est toujours au-dessus de ses tangentes.

◊ Pour $\lambda > 0$.
Comme $\lambda > 0$, alors $2\,\lambda\,x^2 - 1 = \left(\sqrt{2\,\lambda}\;x\right)^2 - 1^2 = \left(\sqrt{2\,\lambda}\;x - 1\right)\left(\sqrt{2\,\lambda}\;x + 1\right)$.
L'équation $g_\lambda''(x) = 0$ revient donc à $\left(\sqrt{2\,\lambda}\;x - 1\right)\left(\sqrt{2\,\lambda}\;x + 1\right) = 0$.

Il y a donc 2 solutions à l'équation: $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\lambda}}$ et $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2\,\lambda}}$.

La courbe Γ_λ présente donc 2 points où elle traverse ses tangentes: les points d'abscisses $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\lambda}}$ et $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2\,\lambda}}$.

c. On obtient deux allures de courbes suivant le signe de λ :

$\lambda>0$	$\lambda<0$
	

B.1.a. La fonction $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc on sait que F_λ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F_\lambda'(x) = e^{-\lambda x^2} = g_\lambda(x)$ pour tout réel x.

b. La fonction F_1 est dérivable et pour tout réel x, $F_1'(x) = e^{-x^2} = g_1(x)$.

Alors la fonction $G : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $G'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \times \sqrt{\lambda}\, e^{-\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)^2} = e^{-\lambda x^2} = F_\lambda'(x)$.

Donc F_λ et G sont deux primitives de la même fonction g_λ.
Elles diffèrent donc d'une constante K : on a $G(x) = F_\lambda(x) + K$ pour tout réel x.
Rappelons alors que F_λ est l'unique primitive de g_λ qui s'annule en 0: on a $F_\lambda(0) = 0$.

On en déduit $G(0) = K$, or $G(0) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(\sqrt{\lambda} \times 0\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1(0) = 0$.

Par suite $K = 0$ et $G(x) = F_\lambda(x)$ pour tout réel x.

Pour tout réel x, on a l'égalité: $F_\lambda(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$.

2. Pour tout réel x, $-x$ est réel.
La fonction $G : x \mapsto -F_\lambda(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $G'(x) = -(-F_\lambda'(-x)) = e^{-\lambda(-x)^2} = e^{\lambda x^2} = g_\lambda(x)$.
La fonction G est donc une primitive de g_λ.
Remarquons alors que $G(0) = -F_\lambda(0) = 0$.
G est donc la primitive de g_λ qui s'annule en 0: c'est F_λ.
Pour tout réel x, on a donc $-F_\lambda(-x) = F_\lambda(x)$, ou encore $F_\lambda(-x) = -F_\lambda(x)$: la fonction F_λ est donc impaire.

Remarque 1:
On peut raisonner sur les aires.

Comme $g_\lambda(x) > 0$ pour tout réel x, alors pour $a > 0$, $F_\lambda(a) = \displaystyle\int_0^a g_\lambda(t)\, dt$ est l'aire du domaine du plan compris entre la courbe Γ_λ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

Pour tout réel $a > 0$, $-a < 0$, de même $\displaystyle\int_{-a}^0 g_\lambda(t)\, dt$ est l'aire du domaine du plan compris entre la courbe Γ_λ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -a$ et $x = 0$.
Comme la fonction f_λ est paire, alors sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et donc les domaines précités sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées: ils sont superposables et ont la même aire.

On en déduit que pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x g_\lambda(t)\, dt = \int_{-x}^0 g_\lambda(t)\, dt$.

Remarquons finalement $F_\lambda(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} g_\lambda(t)\, dt = -\int_{-x}^0 g_\lambda(t)\, dt$ d'où $F_\lambda(-x) = -F_\lambda(x)$.

En raisonnant de même pour $x < 0$, on obtient que F_λ est impaire.

Remarque 2:
Ce résultat est général (à condition de choisir la primitive qui s'annule en 0).
Soit f une fonction qui s'annule en 0.
La fonction est paire (resp impaire) si et sa seulement si sa dérivée est impaire (resp paire).

Remarque 3:
On peut aussi faire un changement de variable dans l'intégrale (hors-programme de terminale).

On a $\displaystyle\int_0^{-x} g_\lambda(t)\, dt = \int_{u(0)}^{u(-x)} g_\lambda(u(t))\, du(t)$ avec $u(x) = -x$ donc $\displaystyle\int_0^{-x} g_\lambda(t)\, dt = \int_0^x g_\lambda(-t)\,(-dt) = -\int_0^x g_\lambda(t)\, dt$ car g_λ est paire.

3. Pour tout réel x, $F_\lambda'(x) = e^{-\lambda x^2}$ et comme $e^a > 0$ pour tout réel a, alors $F_\lambda'(x) > 0$ pour tout réel x.
La fonction F_λ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite de la deuxième partie, on se place dans le cas où λ est strictement positif.

4.a. Montrer que, pour tout réel t supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\lambda}$, $g_\lambda(t) \le e^{-t}$.

Soit $t \ge \dfrac{1}{\lambda} > 0$.

Alors $-\lambda\, t \le -1 < 0$ et donc comme $t > 0$, $-\lambda\, t^2 \le -t$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^{-\lambda\, t^2} \le e^{-t}$ d'où $g_\lambda(t) \le e^{-t}$.

Remarque:

On peut aussi étudier le signe de la différence $e^{-t} - e^{-\lambda\, t^2} = e^{-\lambda\, t^2}(e^{t\,(\lambda\, t-1)} - 1)$.

Comme $t \ge \dfrac{1}{\lambda} > 0$, alors $\lambda\, t - 1 \ge 0$ d'où $t\,(\lambda\, t - 1) \ge 0$ et ainsi $e^{t\,(\lambda\, t-1)} \ge 1$.

Comme $e^{-\lambda\, t^2} > 0$, alors $e^{-t} - e^{-\lambda\, t^2} \ge 0$ pour tout réel $t \ge \dfrac{1}{\lambda}$.

b. En intégrant l'inégalité précédente sur $\left[\dfrac{1}{\lambda}; x\right]$, $\displaystyle\int_{\frac{1}{\lambda}}^{x} g_\lambda(t)\, dt \le \int_{\frac{1}{\lambda}}^{x} e^{-t}\, dt$.

Remarquons alors que $\displaystyle\int_{\frac{1}{\lambda}}^{x} g_\lambda(t)\, dt = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{0} g_\lambda(t)\, dt + \int_{0}^{x} g_\lambda(t)\, dt = \int_{0}^{x} g_\lambda(t)\, dt - \int_{0}^{\frac{1}{\lambda}} g_\lambda(t)\, dt = F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Finalement, on obtient que pour tout réel x supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) \le \displaystyle\int_{\frac{1}{\lambda}}^{x} e^{-t}\, dt$.

On a $\displaystyle\int_{\frac{1}{\lambda}}^{x} e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_{\frac{1}{\lambda}}^{x} = -e^{-x} - \left(-e^{-\frac{1}{\lambda}}\right) = e^{-\frac{1}{\lambda}} - e^{-x} \le e^{-\frac{1}{\lambda}}$ puisque $e^{x} > 0$ pour tout réel x.

Pour tout réel x supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) \le e^{-\frac{1}{\lambda}}$ d'où $F_\lambda(x) \le F_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) + e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

Pour tout entier naturel strictement positif, on pose $u_n = F_\lambda(n)$.

c. La suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante.

En effet $\displaystyle\int_{0}^{n+1} g_\lambda(t)\, dt = \int_{0}^{n} g_\lambda(t)\, dt + \int_{n}^{n+1} g_\lambda(t)\, dt$ d'où $u_{n+1} = u_n + \displaystyle\int_{n}^{n+1} g_\lambda(t)\, dt$.

Alors comme pour tout réel t, $g_\lambda(t) > 0$, en particulier pour tout réel $t \in [n; n+1]$ et donc $\displaystyle\int_{n}^{n+1} g_\lambda(t)\, dt \ge 0$.

Ainsi $u_{n+1} \ge u_n$ pour tout entier naturel $n > 0$.

La suite $(u_n)_{n>0}$ est majorée à partir du rang $N \ge E\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) + 1$.

Pour tout entier $n \ge N$, $n \ge E\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) + 1 > \dfrac{1}{\lambda}$ et comme pour tout réel $x \ge \dfrac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x) \le F_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) + e^{-\frac{1}{\lambda}}$, alors on en déduit que pour tout entier $n \ge N$, $F_\lambda(n) \le F_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) + e^{-\frac{1}{\lambda}}$ d'où $u_n \le F_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) + e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

La suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante et majorée à partir d'un certain rang donc on sait qu'elle est convergente.

La suite $(u_n)_{n>0}$ a une limite finie en $+\infty$, que l'on note L_λ .

d. On a montré que pour tout réel x , $F_\lambda(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(\sqrt{\lambda}\ x\right)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_\lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(\sqrt{\lambda}\ x\right)$.

Alors comme $\sqrt{\lambda} > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\lambda}\ x = +\infty$ et donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_1\left(\sqrt{\lambda}\ x\right) = \lim_{X\to+\infty} F_1(X) = L_1$.

Par suite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(\sqrt{\lambda}\ x\right) = \frac{L_1}{\sqrt{\lambda}}$ et donc $L_\lambda = \dfrac{L_1}{\sqrt{\lambda}}$.

e. On a montré que pour tout réel x supérieur ou égal à $\frac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

Comme de plus F_λ est croissante sur $\mathbb{R}$, alors pour $x \geq \frac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x) \geq F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ d'où $0 \leq F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

En passant à la limite dans l'inégalité, on obtient $0 \leq \lim\limits_{x\to+\infty}\left(F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \leq \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{\lambda}}$ d'où comme $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\lambda(x) = L_\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq L_\lambda - F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

f. On suppose dans cette question $\lambda = \frac{1}{2}$.

D'après la question précédente, $0 \leq L_{\frac{1}{2}} - F_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \leq e^{-\frac{1}{\frac{1}{2}}}$ d'où $0 \leq L_{\frac{1}{2}} - F_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \leq e^{-2}$.

Donc une valeur approchée à e^{-2} près de $L_{\frac{1}{2}}$ est $F_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Remarque:
On s'arrête là.
On ne connaît pas de primitive de $g_{\frac{1}{2}}$ pas plus que de g_λ.
En fait les fonctions F_λ, en particulier F_1 sont des "nouvelles" fonctions qui ne s'expriment pas à l'aide des fonctions de références connues.
Leurs expressions sont justement données à l'aide d'intégrales.

On admet dans la suite du problème que $\mathbf{L_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

g. On a montré que $L_\lambda = \frac{L_1}{\sqrt{\lambda}}$ donc $L_{\frac{1}{2}} = \dfrac{L_1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$ d'où $L_1 = \dfrac{L_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On en déduit donc $L_\lambda = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$ pour tout réel $\lambda > 0$.

C. Soit la fonction $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1.a. On a $\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} g_{\frac{1}{2}}(x)$ et comme $g_{\frac{1}{2}}$ est paire alors ψ est paire.

b. Comme une exponentielle est toujours positive, et comme $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} > 0$ alors $\psi(x) \geq 0$ pour tout réel x.

La fonction $g_{\frac{1}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (cf **B.1.a.**) donc la fonction $\psi = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} g_{\frac{1}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^x \psi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \psi(t)\,dt$ existe et est finie égale à $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to+\infty} \int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L_1 = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} = \frac{1}{2}$.
On a montré à la question **B.2.** que la fonction $F_{\frac{1}{2}}$ est impaire donc $F_{\frac{1}{2}}(x) = -F_{\frac{1}{2}}(-x)$ pour tout réel x donc $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\frac{1}{2}}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -F_{\frac{1}{2}}(-x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\frac{1}{2}}(-x)$.

Alors comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{\frac{1}{2}}(x) = L_1$, par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\frac{1}{2}}(-x) = L_1$.

On en déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\frac{1}{2}}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt = -L_1$ et comme $\int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt = -\int_x^0 g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt = L_1$.

Finalement, $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 \psi(t)\,dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt$ existe finie et est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} L_1 = \dfrac{1}{2}$.

Les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 \psi(t)\,dt$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \psi(t)\,dt$ existent et sont finies, leur somme étant égale à $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

La fonction ψ vérifient les 3 conditions données, la fonction ψ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Remarque:
On peut aussi raisonner avec la parité de ψ et sur les aires pour démontrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 \psi(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \psi(t)\,dt = \dfrac{1}{2}$.

2. Pour tous réels a et b,

$$\int_a^b t\,\psi(t)\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b (-t)\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b u'(t)\,e^{u(t)}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{u(t)}]_a^b = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{a^2}{2}} - e^{-\frac{b^2}{2}}\right).$$

Alors pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^x t\,\psi(t)\,dt = \frac{1 - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{x^2}{2}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\psi(t)\,dt$ existe finie et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\psi(t)\,dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{x^2}{2}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_0^x t\,\psi(t)\,dt$ existe finie et $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_0^x t\,\psi(t)\,dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 t\,\psi(t)\,dt = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ puisque $\int_x^0 t\,\psi(t)\,dt = -\int_0^x t\,\psi(t)\,dt$ pour tout réel x.

Finalement $E(X) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 t\,\psi(t)\,dt + \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\psi(t)\,dt = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$.

Remarque:
On dit que la variable aléatoire est centré puisque justement son espérance est nulle.

3.a. Soit un réel a supérieur ou égal à 2.

Remarque:
L'énoncé donne par définition $P(X \le a) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\,dt$ mais ne dit rien sur $P(a \le X \le b)$ ni sur $P(X = a)$.

On sait donc que $P(X \le a) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^a \psi(t)\,dt$.

Or pour tout réel $a \ge 0$, on a $(X \le a) = (X \le 0) \cup (0 < X \le a)$ donc $P(X \le a) = P(X \le 0) + P(0 < X \le a)$ puisque $(X \le 0) \cap (0 < X \le 2) = \emptyset$.

On a donc l'égalité $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^a \psi(t)\,dt = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 \psi(t)\,dt + P(0 < X \le a)$ d'où

$P(0 < X \le a) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^a \psi(t)\,dt - \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 \psi(t)\,dt$.

Or comme $\int_x^a \psi(t)\,dt - \int_x^0 \psi(t)\,dt = \int_0^a \psi(t)\,dt \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\int_x^a \psi(t)\,dt - \int_x^0 \psi(t)\,dt\right) \in \mathbb{R}$ d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_x^a \psi(t)\,dt - \int_x^0 \psi(t)\,dt\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^a \psi(t)\,dt - \lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^0 \psi(t)\,dt$ et finalement $P(0 < X \le a) = \int_0^a \psi(t)\,dt$.

On a aussi pour tous réels $a < b$, $(0 < X \le b) = (0 < X \le a) \bigcup (a < X \le b)$, réunion disjointe, donc $P(a < X \le b) = P(0 < X \le b) - P(0 < X \le a) = \int_0^b \psi(t)\,dt - \int_0^a \psi(t)\,dt = \int_a^b \psi(t)\,dt$.

Remarquons enfin que la variable aléatoire X ne charge pas les points, c'est à dire que pour tout réel a, $P(X = a) = 0$.

Pour tout réel $\epsilon > 0$, $P(a - \epsilon < X \le a) = \int_{a-\epsilon}^a \psi(t)\,dt$.

On a $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\int_{a-\epsilon}^a \psi(t)\,dt = \int_a^a \psi(t)\,dt = 0$ par continuité de la fonction ψ .

D'autre part comme $a \in]\,a - \epsilon; a]$ pour tout réel $\epsilon > 0$, alors $\lim\limits_{\epsilon -> 0}(a - \epsilon < X \le a) = (X = a)$. Par suite $\lim\limits_{\epsilon\to 0} P(a - \epsilon < X \le a) = P(X = a)$.

On obtient donc $P(X = a) = 0$.

On en déduit donc que $P(0 \le X \le a) = P(0 < X \le a)$ et $P(a \le X \le b) = P(a < X \le b)$ puisque $[0; a] = \{a\} \bigcup]\,0; a]$ et $[a; b] = \{a\} \bigcup]\,a; b]$ qui sont des réunions disjointes.

D'après la partie **B.**, on sait que pour tout réel $x \ge \frac{1}{2}$, $0 \le \int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt \le e^{-2}$ donc

$0 \le \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$ et finalement $0 \le \int_0^x \psi(t)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$.

Comme $a \ge 2 \ge \frac{1}{2}$, on obtient $0 \le \int_0^a \psi(t)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$ et $0 \le \int_0^2 \psi(t)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$

puis $\int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt \le \int_0^a \psi(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt$ et $-\int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt \ge -\int_0^2 \psi(t)\,dt \ge -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt$.

Alors $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} \le \int_0^a \psi(t)\,dt - \int_0^2 \psi(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$ et finalement $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} \le \int_2^a \psi(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$

c'est à dire $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} \le P(2 \le X \le a) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$.

La probabilité $P(2 \le X \le a)$ est majorée par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$.

b. Quel que soit le réel a positif et quel que soit $x \ge a$, $P(0 \le X \le a) = \int_0^a \psi(t)\,dt \le \int_0^x \psi(t)\,dt \le \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \psi(t)\,dt$

donc $P(0 \le X \le a) \le \frac{1}{2}$.

En particulier, $P(0 \le X \le 2) \le \frac{1}{2}$.

De plus pour tout réel a, $P(0 \le X \le a) = P(0 \le X \le 2) + P(2 \le X \le a)$.

Alors comme pour tout réel $a \ge 2$, $P(2 \le X \le a) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$ et $P(0 \le X \le a) \le P(0 \le X \le 2) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$.

D'où $\lim\limits_{a\to+\infty} P(0 \le X \le a) \le P(0 \le X \le 2) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$ c'est à dire $\frac{1}{2} \le P(0 \le X \le 2) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$ et donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} \le P(0 \le X \le 2)$.

Finalement $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} \le P(0 \le X \le 2) \le \frac{1}{2}$.

On a $P(X<2)=P(X\le 2)=P(X\le 0)+P(0\le X\le 2)$ donc de l'encadrement précédent, on déduit $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-2}\le P(X<2)\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ d'où $1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-2}\le P(X<2)\le 1$.

En effet rappellons que $P(X\le 0)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^0\psi(t)\,dt=\frac{1}{2}$.

D. Lors de l'étude la loi normale centrée réduite, il est utile de s'intéresser aux limites de la forme $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x t^n\,\psi(t)\,dt$ où n est un entier naturel.

1. On a $b_1(x)=\int_0^x\chi_1(t)\,dt=\int_0^x t\times g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt=1-e^{-\frac{x^2}{2}}$ (Question **C.2.**).

2.a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit x un réel positif.

On a: $b_n(x)=\int_0^x\chi_n(t)\,dt=\int_0^x t^n\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\int_0^x t^{n-1}\times\left(t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt$ et une primitive de $t\mapsto t\,e^{-\frac{t^2}{2}}$ est $t\mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$.

La formule d'intégration par parties donne:

$$b_n(x)=\left[t^{n-1}\times\left(-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\right]_0^x-\int_0^x(n-1)\,t^{n-2}\times\left(-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt$$

$$b_n(x)=-x^{n-1}\,e^{-\frac{x^2}{2}}-\left(-0^{n-1}\times e^{-\frac{0^2}{2}}\right)+(n-1)\int_0^x\chi_{n-2}(t)\,dt$$

$$b_n(x)=-x^{n-1}\,e^{-\frac{x^2}{2}}+(n-1)\,b_{n-2}(x).$$

b. Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Préliminaire 1: Soit k un entier naturel.

Pour tout réel $x>0$, $-x^k\,e^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{x^k}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}\times\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{e^{\frac{x^2}{2}}}=-\frac{1}{2^k}\times\frac{1}{x^k}\times\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{e^{\frac{x^2}{2}}}$.

Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}=+\infty$ et que $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X^k}=+\infty$ pour tout entier naturel $k\ge 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}=+\infty$ et par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{e^{\frac{x^2}{2}}}=0$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}=\begin{cases}1\text{ si }k=0\\ 0\text{ sinon}\end{cases}$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{x^{n+1}}\times\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{e^{\frac{x^2}{2}}}=0$.

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}-x^k\,e^{-\frac{x^2}{2}}=0$ pour tout entier naturel k.

Préliminaire 2:

On a montré que $b_1(x)=1-e^{-\frac{x^2}{2}}$ donc $B_1=\lim\limits_{x\to+\infty}b_1(x)=1\in\mathbb{R}$.

D'autre part remarquons que $b_0(x)=\int_0^x\chi_0(t)\,dt=\int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt$ donc $B_0=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt=L_{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\in\mathbb{R}$ (question **B.**).

On raisonne par récurrence sur $n\ge 2$.

On définit pour n entier naturel ≥ 2, la propriété $\lim\limits_{x\to+\infty}b_n(x)=B_n\in\mathbb{R}$.

La propriété est vraie au rang 2.

En effet, on a montré que $b_2(x)=-x\,e^{-\frac{x^2}{2}}+(2-1)\,b_0(x)$ pour tout réel x positif.

Alors comme $\lim\limits_{x\to+\infty}-x\,e^{-\frac{x^2}{2}}=0$ (préliminaire 1) et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}b_0(x)=B_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\in\mathbb{R}$ alors par somme de limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} b_2(x) = 0 + \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$.

Soit n un entier, $n \geq 2$.
On fait l'hypothèse de récurrence, la propriété est vraie jusqu'au rang n. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} b_k(x) \in \mathbb{R}$ pour $2 \leq k \leq n$.

On a montré que pour tout réel x positif, $b_{n+1}(x) = -x^n e^{-\frac{x^2}{2}} + n\, b_{n-1}(x)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^n e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ (préliminaire 1) et par hypothèse de récurrence, $\lim\limits_{x\to+\infty} b_{n-1}(x) \in \mathbb{R}$ car comme $n \geq 2$, alors $n-1 \geq 1$.
Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} b_n(x) = 0 + n \lim\limits_{x\to+\infty} b_{n-1}(x) \in \mathbb{R}$.

La propriété est vraie au rang $n+1$. Elle est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$.

c. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On sait que $b_n(x) = -x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} + (n-1)\, b_{n-2}(x)$ donc $B_n = \lim\limits_{x\to+\infty} b_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} + (n-1)\, b_{n-2}(x)\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} b_{n-2}(x) = B_{n-2} \in \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} + (n-1)\, b_{n-2}(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (n-1)\, b_{n-2}(x) = (n-1) \lim\limits_{x\to+\infty} b_{n-2}(x) = (n-1)\, B_{n-2}$.
Par conséquent $B_n = (n-1)\, B_{n-2}$.

d. On a montré que $B_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \chi_1(t)\, dt = 1$ (question **C.2.**).
On en déduit $B_3 = (3-1)\, B_1 = 2$.

On a obtenu $B_2 = (2-1)\, B_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ d'où $B_4 = (4-1)\, B_2 = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.

3.a. On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Cas impair: Soit, pour k entier naturel, la propriété $I(k)$: $B_{2k+1} = 2^k\, k!$.

La propriété est vraie pour $k = 0$.
En effet $B_{2\times0+1} = B_1 = 1$ et $2^0 \times 0! = 1\times1 = 1$ (par convention $0! = 1$).
donc on a $B_{2\times0+1} = 2^0 \times 0!$.

Soit k un entier. On suppose la propriété $I(k)$ vraie. On a donc $B_{2k+1} = 2^k\, k!$
On a montré que pour tout entier n, $B_{n+2} = ((n+2)-1)\, B_{n+2-2} = (n+1)\, B_n$.
Alors comme $2(k+1)+1 = (2k+1)+2$, on en déduit $B_{2(k+1)+1} = (2(k+1)+1-1)\, B_{2k+1} = 2(k+1)\, B_{2k+1}$.
Comme par hypothèse de récurrence, $B_{2k+1} = 2^k\, k!$, on obtient $B_{2(k+1)+1} = 2(k+1)\times 2^k\, k! = (2\times 2^k)\times k! \times (k+1)$
d'où $B_{2(k+1)+1} = 2^{k+1}\,(k+1)!$.
La propriété $I(k+1)$ est vraie. La propriété $I(k)$ est donc héréditaire.
D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier k. On a donc $B_{2k+1} = 2^k\, k!$ pour tout entier naturel k.

Cas pair: Soit, pour k entier naturel, la propriété $P(k)$: $B_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{k+1}\, k!}\sqrt{2\pi}$.

La propriété est vraie pour $k = 0$.

En effet $B_{2\times0} = B_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $\dfrac{(2\times0)!}{2^{0+1}\times 0!}\sqrt{2\pi} = \dfrac{1}{2\times1}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ (par convention $0! = 1$).

donc on a $B_{2\times0} = \dfrac{(2\times0)!}{2^{0+1}\times0!}\sqrt{2\pi}$.

Soit k un entier. On suppose la propriété $P(k)$ vraie. On a donc $B_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{k+1}\, k!}\sqrt{2\pi}$

On a montré que pour tout entier n, $B_{n+2} = ((n+2)-1)\,B_{n+2-2} = (n+1)\,B_n$.
Alors comme $2\,(k+1) = 2\,k+2$, on en déduit $B_{2\,(k+1)} = (2\,(k+1)-1)\,B_{2\,k} = (2\,k+1)\,B_{2\,k}$.

Comme par hypothèse de récurrence, $B_{2\,k} = \dfrac{(2\,k)\,!}{2^{k+1}\,k\,!}\sqrt{2\,\pi}$, on obtient $B_{2\,(k+1)} = (2\,k+1)\,\dfrac{(2\,k)\,!}{2^{k+1}\,k\,!}\sqrt{2\,\pi} = \dfrac{(2\,k+1)\,2\,(k+1)}{2\,(k+1)} \times \dfrac{(2\,k)\,!}{2^{k+1}\,k\,!} = \dfrac{(2\,k)\,!\times(2\,k+1)\times 2\,(k+1)}{2\times 2^{k+1}\times k\,!\times(k+1)}\sqrt{2\,\pi}$ d'où $B_{2\,(k+1)} = \dfrac{(2\,(k+1))\,!}{2^{(k+1)+1}\,(k+1)\,!}\sqrt{2\,\pi}$.

La propriété $P(k+1)$ est vraie. La propriété $P(k)$ est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier k. On a donc $B_{2\,k} = \dfrac{(2\,k)\,!}{2^{k+1}\,k\,!}\sqrt{2\,\pi}$ pour tout entier naturel k.

b. Remarquons que pour tout entier naturel n, pour tout réel t, $t^n\,\psi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\chi_n(t)$.

Ainsi pour tout entier naturel n, pour tout réel positif x, $\displaystyle\int_0^x t^n\,\psi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_0^x \chi_n(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,b_n(x)$ et donc finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^n\,\psi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\lim_{x\to+\infty} b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,B_n$.

On déduit de la question précédente, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^n\,\psi(t)\,dt = \begin{cases} \dfrac{(2\,k)\,!}{2^{k+1}\,k\,!} & \text{si } n = 2\,k \\[2ex] \dfrac{2^k\,k\,!}{\sqrt{2\,\pi}} & \text{si } n = 2\,k+1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{n\,!}{2^{\frac{n}{2}+1}\left(\frac{n}{2}\right)!} & \text{si } n \text{ pair} \\[2ex] \dfrac{2^{\frac{(n-1)}{2}}\,\frac{(n-1)}{2}\,!}{\sqrt{2\,\pi}} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

Remarque: on appelle ces nombres les moments d'ordre n de la loi de probabilité.
Pour $n = 1$, on retrouve l'espérance, pour $n = 2$, la variance et pour $n > 2$, ils permettent de donner d'autres informations probabilistes ou statistiques.

★★★★★ FIN DE LA CORRECTION ★★★★★