Concours d'admission Ecole de santé des armées avril 2014

Avertissements

Durée : 1 heure 30 minutes, coefficient : 3

- L'utilisation de calculatrice, règle de calcul, de formulaire et de papier millimétré n'est pas autorisé.
- Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
- Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe.
- Les candidats traiteront les trois exercices.
- Les réponses des exercices n^o 1 et n^o 2 (QCM) seront données dans une grille prévue à cet effet.
- L'exercice n^o 3 sera traité sur une copie à part.

EXERCICE 1 — 7 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.
On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui parait exacte **en cochant sur la grille prévue à cet effet.**
Toute réponse juste est comptée $+1$ point. Toute réponse fausse est comptée $-0,5$ point.
Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. **QCM 1** :
   Soit la fonction h définie pour out réel x par $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - x + 4$.
   Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h. :

   A : $h'(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$
   B : h admet un maximum
   C : $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale
   D : l'équation $h(x) = 5$ a une solution unique dans l'ensemble des réels.

2. **QCM 2** :
   Dans l'ensemble des nombres réels, l'inéquation $-2x\mathrm{e}^{-x+1} \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions :

   A : $\emptyset$.
   B : $\{0\}$.
   C : $]-\infty\,;\,0]$.
   D : $[0\,;\,+\infty[$.

3. **QCM 3** :
   On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t$.
   On pourra, pour calculer I, utiliser la dérivée de la fonction h définie sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ par $h(t) = t^3[3\ln(t) - 1]$.
   La valeur exacte de I est :

   A : $(2\mathrm{e}^3 + 1)/9$.
   B : $2\mathrm{e}^3 + 1$.
   C : $\left(\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}\right)/9$.
   D : $\left(\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}\right)/9$.

4. **QCM 4** :
   Soit la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\cos x$.
   La dérivée f' de f est définie pour tout réel x par $f'(x) =$: :

   A : $-\sin x$ B : $\cos x$ C : $\cos x + x\sin x$ D :$\cos x - x\sin x$

5. **QCM 5** : Soit la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\cos x$.
   La primitive F de f telle que $F(0) = 1$ est définie pour tout réel x par $F(x) =$:

   A : $\frac{x^2}{2}\sin x + 1$ B : $-\frac{x^2}{2}\sin x + 1$ C : $\cos x + x\sin x$ D : $\cos x - x\sin x$

6. **QCM 6** : L'intégrale $I = \int_2^4 \frac{3x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

   A : $3\ln(12)$ B : $1,5\ln(5)$ C : $1,5\ln(12)$ D : autre.

7. **QCM 7** :

   On considère la fonction f dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par $f(x) = \frac{-x^2 - 2\ln x}{x}$:
   La limite de f en $+\infty$ est égale à :

   A : 0 B : $-\infty$ C : $+\infty$ D : 1

EXERCICE 2 **7 points**

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.
On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui parait exacte **en cochant sur la grille prévue à cet effet.**
Toute réponse juste est comptée $+1$ point. Toute réponse fausse est comptée $-0,5$ point.
Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. **QCM 8 :**
   Une solution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + \text{i}$ est :

   A : $18 - \text{i}$. B : 1. C : $3 + \text{i}$. D : $9 - \text{i}$.

2. **QCM 9 :**
   On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$:

   A : la suite u est géométrique.
   B : la suite u est arithmétique.
   C : la suite u est majorée par 3.
   D : la suite u est convergente vers 2.

3. **QCM 10 :** On considère trois suites u, v, et w qui vérifient la propriété suivante :
   Pour tout entier naturel n non nul : $u_n < v_n < w_n$.
   Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 2$ et $w_n = u_n + \frac{1}{n}$, alors :

   A : on ne peut pas dire que la suite (v_n) converge
   B : la suite (v_n) n'a pas de limite
   C : $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) > 2$
   D : $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = 2$.

4. **QCM 11 :** Un sac contient 4 boules noires et 3 boules rouges.On tire successivement et sans remise 2 boules du sac. Sachant que la première boule tirée est noire, la probabilité de la seconde soit noire est

   A : $\dfrac{2}{7}$ B : $\dfrac{4}{7}$ C : $\dfrac{1}{2}$ D : $\dfrac{2}{3}$

5. **QCM 12 :**
   On lance un dé cubique bien équilibré et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de dé.
   Soit les évènements :
   I : « le numéro est inférieur ou égal à 3 ».
   M : « le numéro est un multiple de 3 ».

   A : $P(I \cup M) = \frac{5}{6}$.

   B : $P(I \cap M) = \frac{1}{2}$.

   C : I et M sont incompatibles

   D : I et M sont indépendants.

6. **QCM 13 :**
   Une maladie frappe 2 % de la population d'un pays. Pour dépister cette maladie, on utilise un test. On sait que :
   — la probabilité que le test soit positif, sachant que l'individu est malade, est 0,9 ;
   — la probabilité que le test soit négatif, sachant que l'individu n'est pas malade, est 0,9.

   On note les évènements :
   $M+$: « l'individu est malade »
   $M-$: « l'individu n'est pas malade »
   $T+$: « le test est positif »
   $T-$: « le test est négatif »

   A : $P_{M+}(T+)$ vaut 0,1.
   B : $P(T+)$ vaut 0,278.
   C : $P(T+)$ vaut 0,22
   D : $P_{T+}(M+)$ vaut 0,16.

QCM 14 :

X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur [2 ; 20].

La probabilité $P_{X>6}(5 < X < 10)$ est égale à :

A : $\dfrac{5}{18}$ B : $\dfrac{5}{14}$ C : $\dfrac{2}{7}$ D : $\dfrac{1}{4}$

EXERCICE 3 6 points

Un essai thérapeutique est réalisé chez des patients atteints d'une maladie associée à une très forte mortalité. Les données de cet essai sont correctement ajustées par un modèle de survie exponentielle.

Soit X_A la variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_A = 0,22$.

C'est à dire $P(X_A \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t 0,22\mathrm{e}^{-0,22x}\mathrm{d}x$.

Soit X_B la variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_B = 0,11$.

C'est à dire $P(X_B \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t 0,11\mathrm{e}^{-0,11x}\mathrm{d}x$.

t représente le temps en années avec $\geqslant 0$.

Avec un traitement A, la probabilité de survie à l'instant t est égale à $S_A(t) = P(X_A > t)$.

Avec un traitement B, la probabilité de survie à l'instant t est égale à $S_B(t) = P(X_B > t)$.

Aide aux calculs $\mathrm{e}^{-2,2} \approx 0,111$ et $\sqrt{0,111} \approx 0,333$.

1. Calculer $P(X_A \leqslant 10)$.
2. Démontrer que pour tout réel t positif, $S_A(t) = \mathrm{e}^{-0,22t}$.
3. Donner le tableau de variation complet de la fonction S_A. Justifier.
4. Calculer la probabilité de survie à 10 ans dans le cas du traitement B.
5. Calculer la probabilité de survie à 5 ans dans le cas du traitement A.
6. Le rapport de survie des traitements A et B est-il constant au cours du temps ?
7. Pour t fixé, établir la relation entre la survie dans le cas du traitement A et la survie dans le cas du traitement B.