Durée : 1 heure 30

Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH
mai 2013

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie.
La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1 h 30.
L'usage d'une calculatrice est autorisé.
Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
Aucun document n'est autorisé. L'usage du téléphone est interdit.
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.
Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.
Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9.
Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la suite

Un distributeur de café est installé dans le hall d'un lycée.
Partie A

Durant la période de réglage de l'appareil, la tasse déborde une fois sur quatre. Le technicien fait dix essais indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de fois où la tasse déborde parmi ces dix essais.

I-A-1- X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Donner les valeurs de n et p.
I-A-2- Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_1 que la tasse ne déborde jamais sur les dix essais. Puis donner une valeur approchée de P_1 à 10^{-4} près.
I-A-3- Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_2 que la tasse ne déborde qu'une fois sur les dix essais. Puis donner une valeur approchée de P_2 à 10^{-4} près.
I-A-4- Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_3 que la tasse déborde au moins deux fois sur les dix essais.

Partie B

Le distributeur de café est maintenant réglé. On appelle « durée de fonctionnement sans panne » du distributeur, le temps qui s'écoule avant qu'une première tasse ne déborde. La variable aléatoire T , représentant cette durée, exprimée en jours, suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Soit a un réel positif non nul. La probabilité $P(T \leqslant a)$ que la durée de fonctionnement sans panne soit inférieure ou égale à a jours est alors donnée par :

$$P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

I-B-1- Justifier que : $P(T \leqslant a) = 1\mathrm{e}^{-\lambda a}$.
I-B-2- Dans cette question, on suppose que $\lambda = 0,02$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité $P(T > 90)$ que le distributeur fonctionne sans panne plus de 90 jours.
I-B-3- Quelle devrait être la valeur de λ pour que la probabilité que le distributeur fonctionne sans panne plus de 120 jours soit de $0,4$? Déterminer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près de λ. Justifier les calculs.

Partie C

Le distributeur de café étant réglé, le volume de café dans une tasse en centilitres peut être modélisé par une variable aléatoire V suivant une loi normale d'espérance 6 et d'écart type $0,8$.

I-C-1- Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = \dfrac{V-6}{0,8}$? On précisera les paramètres de cette loi.
I-C-2- Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité P_4 que le volume de café dans une tasse soit compris entre $5,2$ et $6,8$ centilitres.

EXERCICE II

On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0\,;\,1],\quad f(x) = \frac{2x+5}{x+1}.$$

Partie A

II-A-1- Donner les réels a et b tels que, pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$.

II-A-2- Soit L l'intégrale définie par : $L = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
Calculer la valeur exacte de L en justifiant les calculs.

Partie B

On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :
pour tout $n \geqslant 1$, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x$.
II-B-1- Soit $n \geqslant 1$ fixé. Justifier que, pour tout réel $x \in [0\,;\,1]$, $1 \leqslant \mathrm{e}^{\frac{x}{n}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.
II-B-2-a- Justifier alors que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad L \leqslant u_n \leqslant L\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.
II-B-2-b- En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et donner sa limite. Justifier la réponse.
II-B-2-c- Justifier que,pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n - L \leqslant L\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

Partie C

On considère l'algorithme suivant :

Variables
  p est un entier
  n est un entier
  L est un réel
Début de l'Algorithme
  L prend la valeur $2+3\ln 2$
  n prend la valeur 1
  Entrer la valeur de p
Tant que $L\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}1\right) > 10^{-p}$ faire
    n prend la valeur $n+1$
  Fin de Tant que
Afficher n
Fin de l'algorithme

Lors de l'exécution de cet algorithme, la valeur entrée pour la variable p est 5. À la fin de l'exécution, la valeur affichée de la variable n est notée N.
II-C-1- Que représente N ?
II-C-2- Donner un réel β tel que : $|u_N - 3\ln 2| \leqslant \beta$.

EXERCICE III

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ orthonormé, direct.
On considère la fonction polynomiale P définie par :
pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, $\quad P(z) = z^4 6z^3 + 14z^2 6z + 13$.

III-1-a- Calculer $P(\text{i})$ et $P(-\text{i})$.
III-1-b- Pour tout complexe z, on a l'égalité : $P(z) = \left(z^2+1\right) Q(z)$ où $Q(z)$ s'écrit sous la forme : $Q(z) = z^2 + cz + d$.
Donner les valeurs des réels c et d.
III-1-c- Déterminer l'ensemble S_1 des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation Q(z) = 0. Justifier le résultat.
III-1-d- En déduire l'ensemble S2 des solutions, dans C, de l'équation $P(z) = 0$.
III-2- Placer sur la figure les points A, C et Ω d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = \text{i}, \quad z_{\text{C}} = 3 + 2\text{i}, \quad z_{\Omega} = 2.$$

III-3-a- On note Z_1, Z_2 et Z_3 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$, $\overrightarrow{\Omega\text{A}}$ et $\overrightarrow{\Omega\text{C}}$.
Donner les valeurs de Z_1, Z_2 et Z_3.
III-3-b- Donner alors les modules $|Z_1|$, $|Z_2|$, $|Z_3|$ de Z_1, Z_2, Z_3.
III-3-c- Déterminer alors les valeurs exactes des distances AC, ΩA et ΩC. Justifier les réponses.
III-3-d- Déterminer une mesure, en radians, de l'angle géométrique $\widehat{\text{A}\Omega\text{C}}$. Justifier le résultat.
III-3-e- Quelle est la nature précise du triangle AΩC ?
III-4- On considère les points B et D d'affixes respectives : $z_{\text{B}} = \overline{z_{\text{A}}}$ et $z_{\text{D}} = \overline{z_{\text{C}}}$ où $\overline{z_{\text{A}}}$ et $\overline{z_{\text{C}}}$ désignent respectivement les complexes conjugués de z_{A} et z_{C}.
III-4-a- Placer les points B et D sur la figure de III-2-.
III-4-b- Justifier que les points A, B, C et D sont sur un même cercle. Préciser son centre I et son rayon r.
III-4-c- Tracer ce cercle sur la figure de III-2-.
III-5- Donner l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aires, du trapèze ABDC.

EXERCICE IV

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points E et F de coordonnées :

$$\text{E}(2\,;\,2\,;\,0) \quad \text{et} \quad \text{F}(0\,;\,2\,;\,4)$$

et la droite Δ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t+3 \\ y & = & t1 \\ z & = & 4 \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$

IV-1-a- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite Δ.
IV-1-b- Justifier que le point E n'appartient pas à Δ.
IV-1-c- Justifier que le point F appartient à Δ.
IV-1-d- En déduire la position relative des droites (EF) et Δ.
IV-2- On considère le plan P contenant les deux droites (EF) et Δ.
Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\,(2\,;\,2\,;\,1)$.
IV-2-a- Donner les produits scalaires $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{EF}}$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u}$.
IV-2-b- Que peut-on en déduire pour le vecteur $\overrightarrow{n}$ par rapport au plan P ?
IV-2-c- Déterminer une équation cartésienne du plan P. Justifier la réponse.
IV-3- On note H le projeté orthogonal du point E sur la droite Δ.

IV-3-a- Donner la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{\text{EH}} \cdot \overrightarrow{u}$.
IV-3-b- Justifier alors que les coordonnées $\left(x_{\text{H}}~;~y_{\text{H}}~;~z_{\text{H}}\right)$ de H vérifient :
$x_{\text{H}} - y_{\text{H}} = 0$
IV-3-c- Donner alors les coordonnées de H.
IV-4- On note G le point de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{\text{FG}} = 2\overrightarrow{n}$.
IV-4-a- Donner les coordonnées de G.
IV-4-b- Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ' parallèle à δ et passant par G.
IV-4-c- Que dire précisément sur la position relative des deux droites Δ' et (EH) ?