Durée : 1 heure 30

Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH
mai 2014

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie.
La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1 h 30.
L'usage d'une calculatrice est autorisé.
Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
Aucun document n'est autorisé. L'usage du téléphone est interdit.
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.
Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.
Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

EXERCICE I

Une enquête réalisée dans le Centre de Documentation et d'Information (CDI) d'un lycée donne les résultats suivants :
60 % des élèves fréquentant le CDI sont des filles et, parmi elles, 40 % sont en seconde, 30 % en première et le reste en terminale. Parmi les garçons fréquentant le CDI, 50 % sont en seconde,
20 % en première et le reste en terminale.

Partie A

On interroge au hasard un élève fréquentant le CDI et on considère les évènements suivants :
F : « l'élève interrogé est une fille »,
G : « l'élève interrogé est un garçon »,
S : « l'élève interrogé est en seconde »,
P : « l'élève interrogé est en première »,
T : « l'élève interrogé est en terminale ».

I-A-1- Compléter un arbre avec les probabilités correspondantes.
I-A-2- Donner la probabilité P_1 que l'élève interrogé soit une fille de seconde.
I-A-3- Donner la probabilité P_2 que l'élève interrogé soit en seconde.
I-A-4- L'élève interrogé est en seconde. Déterminer la probabilité P_3 que ce soit une fille. Justifier la réponse. Puis donner une valeur approchée à 10^{-4} près de P_3.
I-A-5- L'élève interrogé n'est pas en seconde. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_4 que ce soit un garçon.

Partie B

Durant une pause, le CDI accueille n élèves. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de filles parmi ces n élèves.

I-B-1- X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Donner la valeur de p.
I-B-2- Donner, en fonction de n, la probabilité P_5 qu'il n'y ait aucune fille.
I-B-3- Donner, en fonction de n, la probabilité P_6 qu'il y ait au moins une fille.
I-B-4- Déterminer le nombre minimal n_0 d'élèves accueillis au CDI durant cette pause pour que la probabilité qu'il y ait au moins une fille soit supérieure à 0,99. Détailler les calculs.

Partie C

On rappelle que, d'après l'enquête, la proportion de filles fréquentant le CDI est égale à $0,6$.

I-C-1- Soit F la variable aléatoire représentant la fréquence de filles dans un échantillon de 100 élèves pris au hasard, fréquentant le CDI. On admet que F suit une loi normale.
Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de F. Les valeurs numériques des bornes de I seront arrondies à 10^{-3} près.
I-C-2- En fin de matinée, le documentaliste constate que 100 élèves dont 68 filles sont venus au CDI. Peut-on affirmer, au seuil de risque de 5 %, que la fréquence des filles observée au CDI dans la matinée confirme l'hypothèse de l'enquête ? Expliquer pourquoi.

EXERCICE II

Partie A

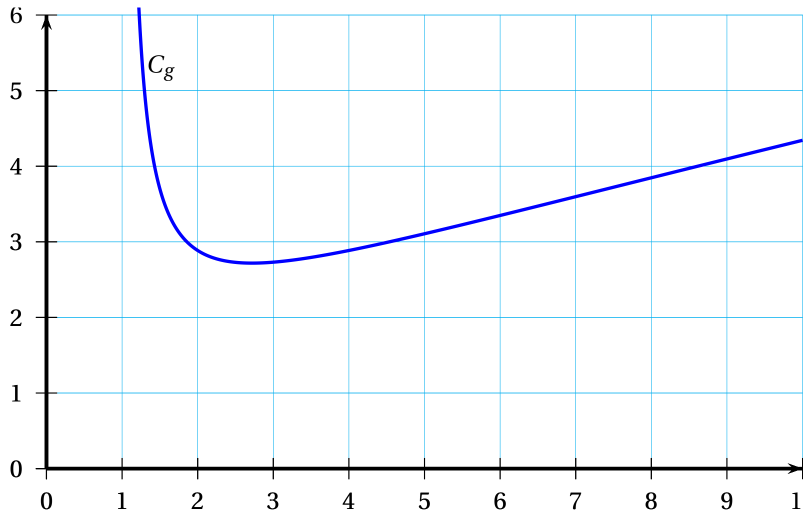
On considère la fonction g définie par

$$\text{pour tout réel } x \text{ de }]1\ ;\ +\infty[, \quad g(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

On note C_g la courbe représentative de g dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
II-A-1- g' désigne la dérivée de g. Déterminer, pour tout $x > 1$, $g'(x)$. Détailler les calculs.
II-A-2-On donne ci-dessous le tableau des variations de g :

x	1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(x_0)$	↗	$+\infty$

Donner la valeur de x_0. Calculer $g(x_0)$.
II-A-3- Soit m un réel. Donner, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation : $g(x) = m$.
II-A-4-a- Déduire de la question précédente que l'équation $g(x) = 4$ a deux solutions. On les notera x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$.
II-A-4-b- Sur la figure est représentée la courbe C_g. Placer les valeurs x_1 et x_2. Laisser les traits de construction.



Partie B

On considère maintenant la fonction f définie par :
pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $\quad f(x) = x - 4\ln x$.

On note C_f la courbe représentative de f dans le même repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

II-B-1-a- Donner $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

II-B-1-b- Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$? En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

II-B-2- f' désigne la dérivée de f. Donner, pour tout $x > 0$, $f'(x)$.

II-B-3- Soit I le point de la courbe C_f d'abscisse 1.
Donner une équation de la tangente à C_f en I.

II-B-4- Dresser le tableau des variations de f.
f admet un extremum au point M de coordonnées $(X_M\,;\,Y_M)$. Donner les valeurs exactes de X_M et de Y_M, ainsi qu'une valeur approchée de Y_M à 10^{-1} près.

II-B-5-a- Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution appartenant à $]0\,;\,1]$.

II-B-5-b- On considère un point P de C_f de coordonnées $(x\,;\,f(x))$.
Montrer que P appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $g(x) = 4$.

II-B-6- Sur la figure de la question II-A-4-b-, placer les points I et M, les tangentes à C_f en I et en M, les points A et B d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses, puis tracer C_f.

EXERCICE III

Partie A

III-A-1- Justifier que l'équation $\cos x = 0,2$ a une unique solution dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
On notera x_0 cette solution.

III-A-2- On considère l'algorithme suivant :

Variables
 a, b et m sont des réels
 δ est un réel strictement positif
Début de l'algorithme
 Entrer la valeur de δ
 a prend la valeur 0
 b prend la valeur 3
 Tant que $b - a > \delta$ faire
  m prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
  Si $\cos(m) > 0,2$ alors
   a prend la valeur m
  sinon
   b prend la valeur m
  Fin Si
 Fin Tant que
 Afficher a
 Afficher b
Fin de l'algorithme

III-A-2-a- On fait tourner cet algorithme en prenant $\delta = 0,5$. Compléter le tableau en utilisant le nombre de colonnes nécessaires.

	Initialisation	Fin de l'étape 1	Fin de l'étape 2		
$m =$					
$\cos m =$					
$a =$	0				
$b =$	3				
$b - a =$	3				

Quelles sont les valeurs affichées pour a et b à la fin de l'algorithme ?
III-A-2-b- On exécute cet algorithme avec $\delta = 0,1$. Les valeurs affichées sont 1,312 5 pour a et 1,406 25 pour b. Que peut-on en déduire pour x_0 ?

Partie B

On considère la fonction F définie, pour tout réel x de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, par :

$$F(x) = \sin(2x).$$

On note C_F la courbe représentative de F dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

III-B-1- F' désigne la dérivée de F. Déterminer, pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $F'(x)$.
III-B-2- Dresser le tableau des variations de F.
III-B-3- Tracer la courbe C_F.

Partie C

Soit $t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. On note $\mathcal{D}_t$ le domaine compris entre la courbe C_F, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = t$. Soit $\mathcal{A}_t$ l'aire, en unités d'aires, de $\mathcal{D}_t$.
III-C-1- Justifier que : $\mathcal{A}_t = -\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$.
III-C-2- On considère l'équation (E) : $\mathcal{A}_t = 0,4$.
III-C-2-a- Justifier que l'équation (E) est équivalente à l'équation $\cos(2t) = \beta$, où β est un réel à préciser.
III-C-2-b- À l'aide de la question III-A-2-b-, donner une valeur approchée à 0,05 près de la solution t_0 de l'équation (E).
III-C-3- Sur la figure de la question III-B-3-, hachurer le domaine $\mathcal{D}_{t_0}$.

EXERCICE IV

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations cartésiennes respectives :

$$\mathscr{P}_1 : \quad -2x+y+z=8 \quad \text{et } \mathscr{P}_2 \quad 2x+5y-z=-20.$$

IV-1-a- Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathscr{P}_1$ et d'un $\overrightarrow{n_2}$ normal au plan $\mathscr{P}_2$.
IV-1-b- Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
IV-2- On note $\mathscr{D}_1$ la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
IV-2-a- Justifier que le point A$(-4~;~-2~;~2)$ appartient à $\mathscr{D}_1$.
IV-2-b- Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ $(1~;~0~;~2)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$.
IV-3- Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}_1$ en notant t le paramètre.
IV-4- On considère la droite $\mathscr{D}_2$ définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 5\\ y &=& k\\ z &=& -2+k\end{array}\right. \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Dans cette question, on va montrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont non coplanaires.
IV-4-a- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite $\mathscr{D}_2$.
IV -4- b- Justifier que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles.
IV -4-c- Montrer que l'intersection $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$ est vide.
IV -5- Soit H un point de la droite $\mathscr{D}_1$ et K un point de la droite $\mathscr{D}_2$.
IV -5-a- Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HK}$ en fonction des paramètres t et k.
IV -5- b Montrer que la droite (HK) est perpendiculaire à $\mathscr{D}_1$ si et seulement si on a :

$$5t-2k=1.$$

IV -5-c- De même, la droite (HK) est perpendiculaire à $\mathscr{D}_2$ si et seulement si t et k vérifient la condition $at+bk=c$ où a, b, c sont trois réels.
Donner les valeurs de ces trois réels.
IV -5-d- Pour quelles valeurs de t et k la droite (HK) est-elle perpendiculaire aux deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$? Donner alors les coordonnées de H et de K.
IV -5-e- Cette perpendiculaire commune (HK) aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ permet de définir la distance entre les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Cette distance d est égale à la longueur HK.
Donner la valeur exacte de d.