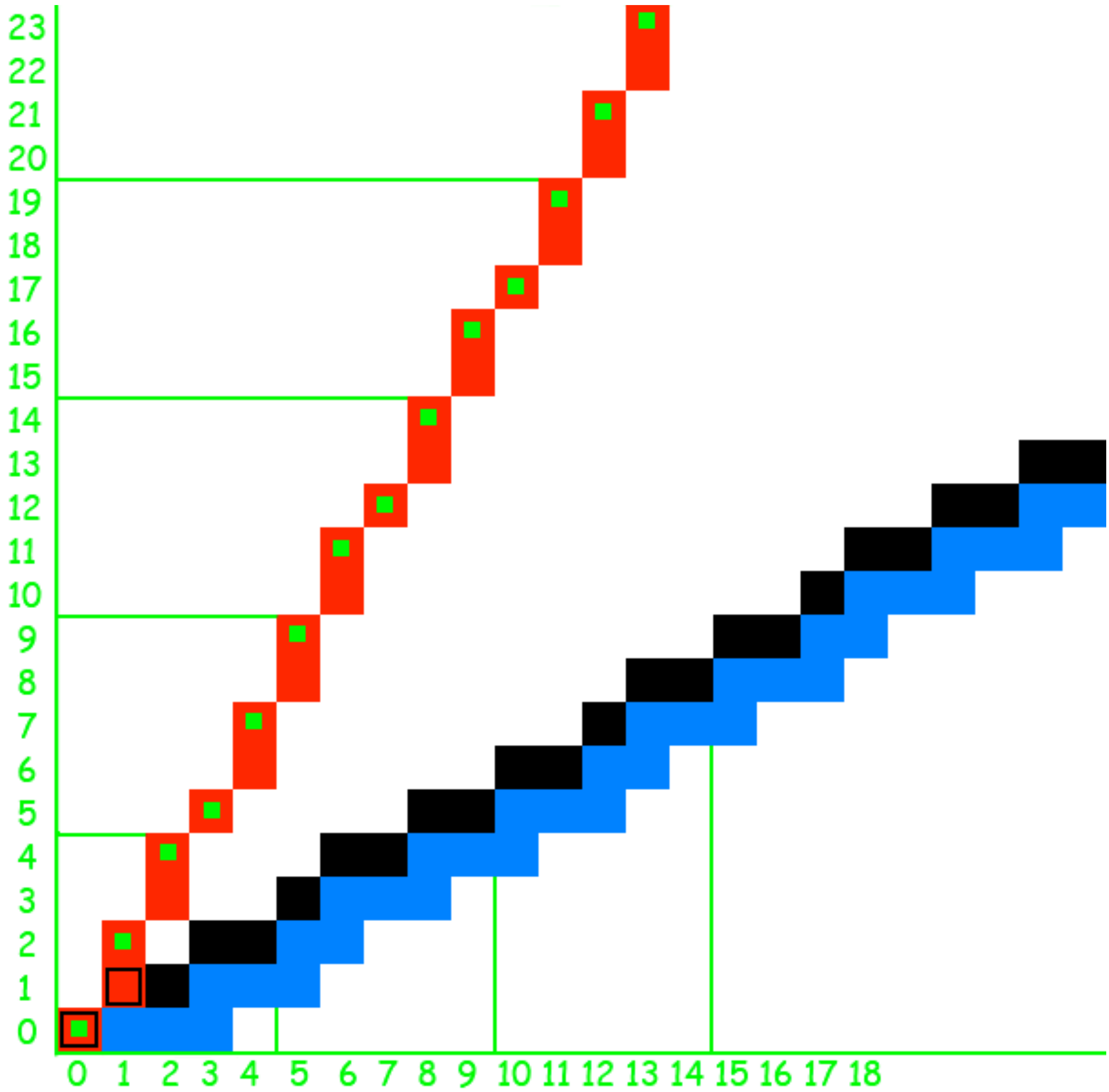
INFORMATIQUE ET CALENDRIERS

1. Représentation d'une droite sur un écran d'ordinateur

Une droite est représentée par une succession de pixels que nous supposons carrés. La droite peut être plus ou moins épaisse. Si nous agrandissons suffisamment l'image nous voyons quelque chose comme le dessin ci-dessous.



En noir une droite d'épaisseur un pixel, en bleu l'extension de cette même droite à deux pixels, en rouge la symétrique de la droite noire par rapport à la première bissectrice. (Nous parlerons des points verts ultérieurement).
Nous avons des graphes de $\mathbf{Z}^2$. En utilisant le repère indiqué, nous pouvons trouver une expression mathématique pour ces représentations de droite :

En noir : $7x - 12y + 6 \in [0\,;\,12[$ ou $7x - 12y \in [-6\,;\,6[$
En bleu : $7x - 12y + 6 \in [0\,;\,31[$ ou $7x - 12y \in [-6\,;\,25[$
En rouge : $12x - 7y + 5 \in [0\,;\,12[$
En vert : $12x - 7y + 5 \in [0\,;\,7[$.
Si en noir nous avons une fonction de **Z** dans **Z** ce n'est pas le cas en rouge et que pour avoir une fonction il faut se restreindre aux points verts.

1.1. Quelques remarques.

1) Dans le cas de la droite noire, nous pouvons réécrire l'expression mathématique :

$$7x + 6 = 12y + \text{reste} \quad \text{où} \quad \text{reste} \in [0\,;\,12[$$

Ce qui prouve que y est le quotient entier de la division de $7x + 6$ par 12. D'où

$$y = \left\lfloor \frac{7x+6}{12} \right\rfloor$$

Où les demi-crochets indiquent l'arrondi par défaut.

De la même façon les points verts satisfont à $y = \left\lfloor \frac{12x+5}{7} \right\rfloor$.

2) L'équation de la symétrie par rapport à la première bissectrice peut paraître bizarre mais résulte d'une manipulation d'inégalités.

$$ax - by + r \in [0\,;\,e[$$

$\Leftrightarrow$ $0 \le ax - by + r < e$

$\Leftrightarrow$ $-e < -ax + by - r \le 0$

En ajoutant $e - 1$ $-1 < -ax + by - r + e - 1 \le e - 1$

Soit encore $0 \le -ax + by - r + e - 1 < e$

Et en échangeant le rôle de x et de y :

$$0 \le bx - ay - r + e - 1 < e$$

3) Nous avons parlé de représentation de droites, mais en réalité et comme toujours nous ne représentons que des segments (limités aux bords de l'écran). Ceci prouve aussi que nous n'aurons que des coefficients entiers et des nombres rationnels. En raison de l'épaisseur de chaque droite discrète et du domaine fini de représentation, il est possible d'attribuer plusieurs équation à une même droite ; ainsi $\left\lfloor \frac{12x+5}{7} \right\rfloor$ et $\left\lfloor \frac{41x+20}{24} \right\rfloor$ correspondent à la même fonction sur l'intervalle [0 ; 26].

4) S'il est facile à partir d'une équation de tracer la représentation graphique, c'est le problème inverse que nous allons nous poser. Une représentation graphique est-elle bien celle d'une droite (au moins sur la partie dessinée) ? Et si oui, quelle en est son équation ?

1.2. Le lien avec les calendriers.

Imaginons que l'abscisse soit le numéro du mois et l'ordonnée le nombre de jours écoulés depuis le début de l'année. Nous obtenons une représentation qui ressemble à la droite rouge ci-dessus avec des barres verticales de 30 ou 31 unités. Il serait intéressant d'avoir une formule permettant le calcul direct.
Une situation analogue a lieu avec la durée des siècles grégoriens qui ont 36524 ou 36525 jours suivant que le siècle correspond à une année bissextile ou non.
Il en est de même dans le calendrier musulman ou les mois ont 29 ou 30 jours, et les années 354 ou 355 jours suivant un cycle de 30. Etc.
Si on veut passer d'un calendrier à un autre il suffit de savoir décompter les jours (passer à la période julienne) ainsi que savoir faire l'opération inverse.

2. Quelques définitions

2.1. Droite discrète

On appelle droite discrète $D(a, b, e, r)$ l'ensemble des points $(x\ ;\ y) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $ax - by + r \in [0\ ;\ e[$. On dit que D est de vecteur directeur $(b\ ;\ a)$, d'épaisseur e et de reste initial r. (Attention, l'épaisseur n'est pas relié directement au nombre de pixels).

Nous avons vu que si $e = b$ comme dans certains exemples précédents alors nous remarquons que y est le reste de la division euclidienne de $ax + r$ par b. Nous pouvons écrire :

$$y = \left\lfloor \frac{ax+r}{b} \right\rfloor$$

2.2. Forme quasi affine

On appelle forme quasi affine l'application de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$ qui à x associe y tel que $y = \left\lfloor \frac{ax+r}{b} \right\rfloor$.

On la note $(a\ ;\ b\ ;\ r)$.

2.3. Code d'une forme quasi affine

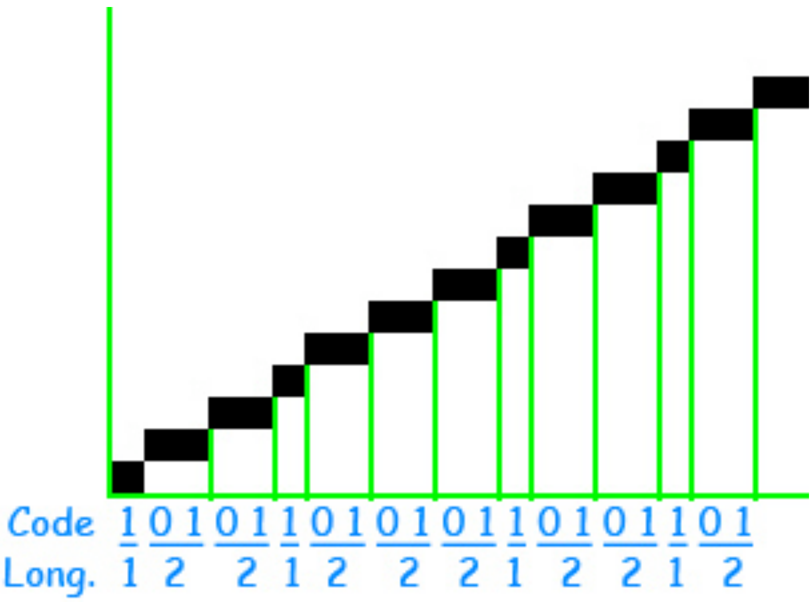
Soit f une forme quasi affine $(a\ ;\ b\ ;\ r)$. On appelle code de la forme quasi affine la fonction définie par $c(x) = f(x+1) - f(x)$.

Comme nous avons $$\frac{ax+r}{b} + \frac{a}{b} - 1 \leq f(x+1) < \frac{ax+r}{b} + \frac{a}{b}$$

et $$-\frac{ax+r}{b} < -f(x) \leq -\frac{ax+r}{b} + 1$$

Nous en déduisons $$\frac{a}{b} - 1 < f(x+1) - f(x) < \frac{a}{b} + 1$$

C'est-à-dire que le code ne peut prendre que les deux valeurs $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ et $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + 1$. En particulier, si a < b les seules valeurs possibles sont 0 et 1.



2.4. Palier

Si $a < b$, on appelle palier de la droite $D(a, b, b, r)$ l'ensemble P de tous les points de la droite ayant la même ordonnée. Ils correspondent aux segments de code de longueur maximal se terminant par un code 1 et ne contenant pas d'autre code 1. Ces segments de code seront appelés paliers de code. On appellera début de palier la borne gauche, et fin de palier la borne droite d'un palier. La longueur des paliers sera appelée longueur des codes.

Remarquons que la longueur des codes de la droite noire est le code de la droite représentée par des points verts sur la première figure. De plus dans la symétrie ces points verts correspondent aux fins de paliers. Ce résultat est tout à fait général. Nous avons même :

2.5. Théorèmes

0) Si $a < b$, les débuts de paliers de la droite discrète $D(a, b, b, r)$ forment la droite discrète $D(a, b, a, r)$; de même les fins de paliers forment la droite $D(a, b, a, r+a-b)$.
1) La transvection : $x' = x$, $y' = y - px$, où p est un entier, transforme la droite discrète $D(a, b, b, r)$ en la droite discrète $D(a-pb, b, b, r)$. On obtient le code de la nouvelle droite en retranchant à tous les éléments du code de la première l'entier p.
2) Lorsque $a < b$, la symétrie oblique $x' = x$ $y' = x - y$, transforme la droite discrète $D(a, b, b, r)$ en la droite discrète $D(b - a, b, b, b - 1 - r)$. On obtient le code de la nouvelle droite en échangeant les éléments de code 0 et 1 dans le code de l'ancienne.
3) Lorsque $a < b$, la symétrie $x' = y$, $y' = x$ transforme les débuts de paliers de la droite discrète $D(a, b, b, r)$ en la droite discrète $\mathrm{D}(b, a, a, a-1-r)$. On obtient le code de la nouvelle droite en remplaçant dans le code de l'ancienne chaque palier de code par sa longueur.

2.6. Démonstrations

0) Pour y constant $ax - by + r$ augmente de a à chaque fois que x augmente d'une unité. Les débuts de paliers sont donc tels que $ax - by + r \in [0 , a[$. Pour les fins de paliers on aurait $ax - by + r \in [b-a , b[$ ce qui peut encore s'écrire $ax - by + r-b+a \in [0 , a[$.
1) La première partie est immédiate en remplaçant x et y par leurs expressions en fonction de x' et y'. Pour les codes, il faut remplacer, dans $c'[x] = y'[x' + 1] - y'[x']$, x' par x et y' par $y - px$ ce qui donne $y[x+1] - p(x+1) - \{y[x] - px\} = c[x] - p$.
2) On effectue un raisonnement analogue qui conduit à $c'[x] = 1 - c[x]$. Ceci traduit bien l'échange des 0 et des 1.
3) Voir le cas particulier traité en 1.1. (point 2). Une interprétation géométrique évidente permet d'avoir les codes.

3. Reconnaître une droite discrète

Au début de ce travail les équations de droites étaient données. Or c'est le problème inverse qui se trouve souvent posé. Étant donnée une représentation graphique, reconnaître qu'il s'agit bien de celle d'une droite discrète et trouver son équation.
On peut remarquer que les théorèmes vus précédemment (essentiellement les théorèmes 2, 3 et 4), appliqués convenablement plusieurs fois, permettent de ramener une équation quelconque à celle d'une droite de pente entière (ou une droite horizontale). En effet, la façon dont évoluent les coefficients a et b ressemble beaucoup à la façon dont évolue dividende et diviseur dans l'algorithme d'Euclide. Voyons-le sur un exemple :

	a	b	r	
	77	30	0	
transvection (p = 2)	17	30	0	$a \to a - 2b$
symétrie orthogonale	30	17	16	$a \to b$; $b \to a$
transvection (p = 1)	13	17	16	$a \to a - b$
symétrie oblique	4	17	0	$a \to b - a$
symétrie orthogonale	17	4	3	$a \to b$; $b \to a$
transvection (p =4)	1	4	3	$a \to a - 4b$
symétrie orthogonale	4	1	–3	$a \to b$; $b \to a$

3.1. Reconnaître une droite

Rappelons tout d'abord que si a et b sont des entiers strictement positifs, et y un entier, le plus petit entier x tel que $\left\lfloor \frac{ax+r}{b} \right\rfloor \geq y$ est donné par la formule $x = \left\lfloor \frac{by+a-1-r}{a} \right\rfloor$ et que le plus grand entier x tel que $\left\lfloor \frac{ax+r}{b} \right\rfloor \leq y$ est donné par la formule $x = \left\lfloor \frac{by+b-1-r}{a} \right\rfloor$.

Pour caractériser une droite discrète, nous allons essentiellement travailler sur les codes.
Alors une droite discrète est caractérisée par :

a) Le code est formé de deux entiers consécutifs
b) Une application répétée des opérations suivantes aboutit à un code constant :
   1. Soustraire à tous les éléments de code l'élément le plus petit (On obtient alors un code formé de 0 et de 1).
   2. Si l'élément 1 n'est pas isolé dans le code obtenu, échanger les 1 et les 0.
   3. Remplacer dans le résultat obtenu en (2) les paliers de code par leur longueur.

Prenons l'exemple de la première figure pour la droite marquée par les points verts. Son code est formé d'une alternance de séries de trois 2 et de deux 2 séparées par des 1. Le point (a) de la caractérisation est bien satisfait. Pour le reste nous effectuons les opérations suivantes :

2 2 1 2 2 2 1 2 2 1 2 2 2 1 2 2 1 2 2 2 1	Point a satisfait.
1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0	Point ① (p = 1).
0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1	Point ②.
3 4 3 4 3 4	Point ③. Point a satisfait.
0 1 0 1 0 1	Point ① (p = 3).
2 2 2	Point ③. Le code est constant.

Il faut ensuite remonter les calculs en tenant compte des théorèmes (2.5) où les points ①, ② et ③ correspondent aux théorèmes de même numéro. Il est donc plus simple de donner les formules inverses, à savoir :

①	$a' = a + pb$	$b' = b$	$r' = r$
②	$a' = b - a$	$b' = b$	$r' = b - 1 - r$
③	$a' = b$	$b' = a$	$r' = b - 1 - r$

Avec un code constant égal à 2 nous avons		$a = 2$	$b = 1$	$r = 0$
Point ③	échange de a et b et $r' = 1-1-0$	$a = 1$	$b = 2$	$r = 0$
Point ① (p = 3)	$a' = 1+2\times3$; b, r inchangés	$a = 7$	$b = 2$	$r = 0$
Point ③	échange de a et b et $r' = 2-1-0$	$a = 2$	$b = 7$	$r = 1$
Point ②	$a' = 7-2$; b inchangé ; $r' = 7-1-1$	$a = 5$	$b = 7$	$r = 5$
Point ① (p = 1)	$a' = 5+1\times7$; b, r inchangés	$a = 12$	$b = 7$	$r = 5$

Nous obtenons bien l'équation $12x - 7y + 5 \in [0 , e[$. Vue la forme de la droite, $e = 7$.

3.2. Reconnaître un segment

La reconnaissance d'une droite est très théorique car il faut une connaissance infinie qui peut effectivement être donnée par un algorithme du style "succession de paliers alternativement d'une et deux unités". Cependant, dans la pratique, nous ne disposons que de l'image d'un segment, celui qui apparaît sur l'écran. Cela veut dire que les barres (verticales ou horizontales) initiales ou finales peuvent être raccourcies mais on ne sait pas de combien. Il faudra donc faire très attention avant d'en tenir compte.
Comme nous nous ramenons toujours au cas d'une droite de pente inférieure à 1, nous travaillerons avec des paliers. Le palier initial et le palier final peuvent poser problème pour avoir été raccourcis. On ne peut cependant pas les négliger totalement car s'ils sont trop longs cela veut dire que le code n'est pas celui d'une droite. Il peut y avoir ou non des paliers internes.

Nous travaillons donc sur les codes comme pour les droites. Les codes des paliers internes (s'ils existent) ne posent pas de problème. Pour le palier final ou terminal son code sera sa longueur augmentée d'une unité (pour tenir compte d'un 1 final nécessaire). Pour le palier initial son code sera sa longueur.
S'il existe des paliers internes, nous dirons que les paliers externes (l'initial et le final) sont complets si leur code est strictement supérieur au plus petit des codes internes. S'il n'y a pas de paliers internes, le palier externe le plus long sera complet.
Pour reconnaître un segment, on utilise exclusivement les paliers internes et les paliers externes complets. La méthode est alors la même que pour les droites, mais *r* va changer.

3.3. Le calcul de r

Dans le cadre de la droite, le calcul de *r* résultait des théorèmes (2.5). Pour un segment, cela est un peu plus délicat puisqu'on néglige une partie des données. Si la suppression du palier terminal n'influe pas sur le calcul de *r*, il n'en est pas de même du palier initial puisque cela revient à translater la droite par rapport au repère. Si le palier initial à une longueur *g* et que sans ce palier on a une droite quasi-affine d'équation $y = \left\lfloor \frac{ax+r}{b} \right\rfloor$ alors en rajoutant ce palier initial il viendra une équation $y - 1 = \left\lfloor \frac{a(x-g)+r}{b} \right\rfloor$ soit un décalage de *g* en abscisse et de 1 en ordonnée, c'est-à-dire qu'on a $r' = r - ag + b$ puisque c'est dans ce sens là que cela va nous intéresser.

4. Applications à quelques calendriers

4.1. Notre calendrier civil

<table>
<tr><td>Mar</td><td>Avr</td><td>Mai</td><td>Jun</td><td>Jul</td><td>Aou</td><td>Sep</td><td>Oct</td><td>Nov</td><td>Dec</td><td>Jan</td><td>Fev</td><td></td></tr>
<tr><td>31</td><td>30</td><td>31</td><td>30</td><td>31</td><td>31</td><td>30</td><td>31</td><td>30</td><td>31</td><td>31</td><td>28/9</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>① $p = 30$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td></td><td>②</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="3">3</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td></td><td>③ $g = 2$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">0</td><td colspan="3">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td></td><td>① $p = 2$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="5">2</td><td colspan="4">2</td><td></td><td>③ $g = 2$</td></tr>
</table>

En grisé les termes qui ne doivent pas être pris en compte car ils sont trop petits.
Pour retrouver *a*, *b* et *r* nous reprenons les lignes à partir de la fin.

ligne	règle	a	b	r	$y =$
		2	1	0	$\left\lfloor \frac{2x}{1} \right\rfloor$
5	③	$a' = b = 1$	$b' = a = 2$	$r' = b - 1 - r = 0$	$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$
	$g = 2$			$r' = r - ag + b = 0$	$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$
4	① $p = 2$	$a' = a + pb = 5$	$b' = b = 2$	$r' = r = 0$	$\left\lfloor \frac{5x}{2} \right\rfloor$
3	③	$a' = b = 2$	$b' = a = 5$	$r' = b - 1 - r = 1$	$\left\lfloor \frac{2x+1}{5} \right\rfloor$
	$g = 2$			$r' = r - ag + b = 2$	$\left\lfloor \frac{2x+2}{5} \right\rfloor$
2	②	$a' = b - a = 3$	$b' = b = 5$	$r' = b - 1 - r = 2$	$\left\lfloor \frac{3x+2}{5} \right\rfloor$
1	① $p = 30$	$a' = a + pb = 153$	$b' = b = 5$	$r' = r = 2$	$\left\lfloor \frac{153x+2}{5} \right\rfloor$

Considérons alors une date *j-m-a*. Posons $M = m - 3$ si $m \geq 3$
$M = m + 9$ si $m < 3$
Alors le nombre de jours écoulés depuis le 1er mars précédent vaut :

$$\left\lfloor \frac{153M+2}{5} \right\rfloor + j - 1$$

Pour calculer le nombre de jours écoulés depuis le 1er janvier de l'année *a*, c'est un peu plus délicat à cause des années bissextiles. On vérifiera qu'il faut prendre

si $m < 3$ $\qquad \left\lfloor \frac{153M+2}{5} \right\rfloor + j - 1 - 306$

si $m \geq 3$ $\qquad \left\lfloor \frac{153M+2}{5} \right\rfloor + j - 1 + 60$ si 4 divise *a*

$\qquad \left\lfloor \frac{153M+2}{5} \right\rfloor + j - 1 + 59$ sinon.

4.2. Le cycle des années du calendrier musulman

Le calendrier musulman suit un cycle de 30 années lunaires avec des années de 354 jours et des années abondantes de 355 jours placées aux rangs :

2 5 7 10 13 16 18 21 24 26 29 (32)

à partir d'une année multiple de 30.
Pour bien faire apparaître la périodicité de 30 ans, il y a intérêt à faire le calcul sur deux périodes. On remarquera de plus que nous aurons une droite de pente supérieure à 1 et qu'en travaillant avec les codes, il faudra, à la fin, ajouter 2 qui est l'ordonnée à l'origine de la droite.
Pour les codes nous trouvons la succession suivante :

3 2 3 3 3 2 3 3 2 3 3

Nous construisons alors le tableau :

<table>
<tr><td>ligne</td><td colspan="22">codes</td><td></td><td>g</td><td>p</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>①</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>②</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">(2)</td><td colspan="4">4</td><td colspan="3">3</td><td colspan="4">4</td><td colspan="4">4</td><td colspan="3">3</td><td colspan="2">(3)</td><td>③</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2"></td><td colspan="4">1</td><td colspan="3">0</td><td colspan="4">1</td><td colspan="4">1</td><td colspan="3">0</td><td colspan="2"></td><td>①</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2"></td><td colspan="4">0</td><td colspan="3">1</td><td colspan="4">0</td><td colspan="4">0</td><td colspan="3">1</td><td colspan="2"></td><td>②</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="2"></td><td colspan="7">(2)</td><td colspan="11">3</td><td colspan="2"></td><td>③</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

On vérifiera que ceci conduit à la formule $y = \left\lfloor \frac{30x+4}{11} \right\rfloor$ et en tenant compte de l'ordonnée à l'origine $y = \left\lfloor \frac{30x+4}{11} \right\rfloor + 2$ soit $y = \left\lfloor \frac{30x+26}{11} \right\rfloor$

4.3. Les années embolismiques du calendrier juif

Les années embolismiques (de 13 mois) du calendrier juif suivent le cycle de Méton de 19 ans et sont placées aux rangs : 0 3 6 8 11 14 17 (19)
En construisant un tableau analogue au précédent, c'est-à-dire en travaillant sur deux périodes démontrer que l'on obtient la formule $y = \left\lfloor \frac{19x+5}{7} \right\rfloor$

SOURCE :

Albert TROESCH, *Droites discrètes et calendriers,* Mathématiques et sciences humaines, tome 141 (1998), p. 11-41. Téléchargeable sur <http://www.numdam.org/item?id=MSH_1998__141__11_0>