Pourquoi le livre X d'EUCLIDE?

ou

THÉÉTÈTE, le GALOIS grec

D. ROUX, IGEN

Table des matières

1 Le livre X à travers les siècles 1

2 Que sait-on sur THÉÉTÈTE ? 2

3 L'anthyphérèse périodique 3

4 Une autre découverte de THÉÉTÈTE ? 5

5 Une lecture du dialogue de PLATON 6

6 L'étude des figures régulières 6

7 Bibliographie 7

8 Les figures 7

1 Le livre X à travers les siècles

Le dixième livre des *Éléments* d'EUCLIDE comprend 115 propositions et traite des irrationnels. Il constitue à lui seul le quart des *Éléments* et il est beaucoup plus obscur et complexe que les autres livres. Sa lecture est particulièrement difficile et pénible. En 1585 STÉVIN écrivait :
*« La difficulté du livre 10 d'*EUCLIDE *est à plusieurs devenue en horreur, voire jusqu'à l'appeler* ***la croix des mathématiciens****, matière trop dure à digérer et en laquelle n'aperçoivent aucune utilité ».*

Au siècle suivant, HENRION insère dans sa traduction en français du livre X de nombreux exemples numériques et scholies après avoir fait précéder ce livre de plus de cent pages d'algèbre afin de préparer le lecteur à son étude. Au XVIII^{e} siècle les traductions courantes ne comportent plus le livre X. Le Père DECHALLES écrivait :
« Je laisse le septième, le huitième, le neuvième et le dixième livre des Éléments *d'*EUCLIDE*, parce qu'ils sont inutiles à presque toutes les parties des mathématiques. Je me suis souvent étonné qu'on les ait mis au nombre des* Éléments*, puisqu'il est évident qu'*EUCLIDE *ne les a composés que pour établir la doctrine des incommensurables, laquelle n'étant qu'une* ***vaine curiosité****, ne devrait pas être placée entre les livres élémentaires, mais devrait former un traité particulier ».*

Au XIXe siècle, Woepcke dit : *« Rien n'est plus beau ni plus parfait, que l'ordre et le parallélisme des hexades du livre X »*, alors qualifié de *« chef-d'œuvre de la science grecque »* sans que son utilité ne soit justifiée.

Entre 1910 et 1940 plusieurs savants allemands s'interrogent sur l'intérêt du livre X et concluent par : *« **livre cul de sac** qui ne débouche sur rien »* ou au mieux : *« jeu logique non dépourvu de qualités esthétiques »*. En 1947, l'avis du grand géomètre italien Beppo Levi est : *« jonglerie astucieuse et sans grand intérêt »*.

Il ne nous semble pas raisonnable de laisser penser qu'un traité aussi colossal et élaboré que le livre X n'aurait été rédigé que par pure fantaisie et sans objectif sérieux par les mathématiciens grecs. Il convient de s'interroger sur leur projet. Le présent travail se propose de formuler deux hypothèses qui pourraient justifier cette monumentale entreprise ; elles ne sont pas à chercher loin, mais s'expliquent par la grande amitié qui relie Platon et Théétète et qui fait que les préoccupations de l'un motivent les recherches de l'autre. Or, les références aux mathématiques dans les dialogues de Platon tournent autour de deux problèmes : d'une part l'irrationalité et en particulier l'anthyphérèse de $\sqrt{N}$ (*Théétète* 147) et d'autre part l'étude des figures régulières (*Timée* 53) et par suite le partage des polygones réguliers en triangles par des diagonales.

2 Que sait-on sur Théétète ?

Nous connaissons Théétète par au moins trois sources :

- Suidas nous dit que Théétète d'Athènes était astrologue, philosophe, disciple de Socrate et qu'il enseigna à Héraclée, enfin qu'il écrivit *« les cinq solides »* ;
- Proclus, dans son résumé historique cite Théétète trois fois, nous le présentant comme l'un des plus importants mathématiciens de l'antiquité grecque, auteur de plusieurs découvertes qui trouvèrent place dans les *Éléments*. Nous admettrons sans revenir sur l'argumentation détaillée de Tannery ou de Gardies leur conclusion : Théétète est à l'origine des livres X et XII des *Éléments* d'Euclide ;
- Enfin Platon en fait le personnage central de deux dialogues : le *Sophiste* et le *Théétète*, par lequel (dans le témoignage de Théodore) nous apprenons que Théétète était laid, modeste, courageux, doué d'une grande mémoire, d'une aptitude à comprendre les choses les plus difficiles et qu'il fut un brillant chercheur, bref le meilleur mathématicien de l'époque. La grande admiration de Platon pour son ami est évidente (*Théétète* 144).

Il est admis qu'à deux ans près la date de naissance de Théétète est 415 avant J.C. Nous savons d'autre part qu'il est mort de maladie à la suite de ses blessures lors d'une guerre de Corinthe. Mais il y a deux guerres possibles, l'une en 395, l'autre en 369 avant J.C. Tout le monde a pensé qu'il s'agissait de la seconde alors que, récemment, J.P. Kahane a exprimé l'avis contraire. Voici quelques arguments dans ce sens :

- Théétète a laissé une trace fulgurante de ses capacités et de son œuvre. Il avait une grande réputation mais il n'y a pas d'écrits ni de témoignages sur son âge mûr ni sur ses élèves ;
- Platon fait dire à Socrate, en lui attribuant des dons divinatoires : *« pourvu qu'il atteigne l'âge convenable »* (*Théétète* 142) ;
- Tannery remarque, à partir du résumé historique de Proclus, que le seul mathématicien important cité dans la liste des académiciens est Eudoxe. Si en 387, date de la création de l'Académie, Théétète avait été vivant, il est certain que Platon l'aurait appelé en raison de la grande estime et admiration qu'il avait pour son ami ;
- Dans le *Sophiste*, Platon fait dire par l'étranger d'Élée, à plusieurs reprises et avec une insistance particulière : *« toi qui es si jeune »* ;

- Selon Proclus, Euclide a directement utilisé les travaux d'Eudoxe, alors qu'il a dû achever ceux de Théétète ;
- Ce que Gardies appelle « *la grande fracture des* Éléments *d'*Euclide » montre que Théétète et Eudoxe n'ont pas harmonisé leurs conceptions. En 395 Eudoxe avait 13 ans, c'était trop tôt, alors que si Théétète était mort en 369, cela aurait été possible.

En conclusion, il est hautement probable que, comme Évariste Galois, le grand mathématicien Théétète soit mort à 20 ans.

3 L'anthyphérèse périodique

La démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{N}$ (N entier naturel non carré) du VI^e^ siècle avant notre ère par le pair et l'impair est remplacée au siècle suivant par une preuve géométrique qui repose sur la proposition 2 du livre X, laquelle consiste à effectuer l'anthyphérèse de cette grandeur, autrement dit son développement en fraction continue. Plutôt que de l'effectuer sur les longueurs, il est plus intéressant, car aisément généralisable, de l'effectuer sur les aires. Ainsi, partant d'un rectangle de largeur 1 et de longueur $\sqrt{N}$, on lui retire autant de fois que possible des carrés ayant pour côté la largeur du rectangle et l'on recommence sur le petit rectangle ainsi obtenu et ainsi de suite, (figures 1, 2, 3). La suite des parties entières des formats de ces rectangles successifs (rapport de la longueur sur la largeur) donne le développement en fraction continue de $\sqrt{N}$. Le dessin correspondant est réalisable pour $N = 2, 3, 5, \ldots, 17$, mais plus pour $N = 19$ en raison de la longueur de la période. Le cas $N = 2$ n'est pas signalé dans le dialogue car ce cas ne devait plus poser de problème, ni par suite les deux cas $N = 8$ et $N = 18$ puisque $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Examinons le cas $N = 19$:

$$x_0 = \sqrt{19} \quad a_0 = [x_0] = 4$$

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{19} - 4} = \frac{\sqrt{19} + 4}{3} \quad \text{d'où } a_1 = [x_1] = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{19}+4}{3} - 2} = \frac{3}{\sqrt{19} - 2} = \frac{3(\sqrt{19}+2)}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{5} \quad \text{d'où } a_2 = [x_2] = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{19}+2}{5} - 1} = \frac{5}{\sqrt{19} - 3} = \frac{5(\sqrt{19}+3)}{10} = \frac{\sqrt{19}+3}{2} \quad \text{d'où } a_3 = [x_3] = 3$$

$$x_4 = \frac{1}{x_3 - a_3} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{19}+3}{2} - 3} = \frac{2}{\sqrt{19} - 3} = \frac{2(\sqrt{19}+3)}{10} = \frac{\sqrt{19}+3}{5} \quad \text{d'où } a_4 = [x_4] = 1$$

$$x_5 = \frac{1}{x_4 - a_4} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{19}+3}{5} - 1} = \frac{5}{\sqrt{19} - 2} = \frac{5(\sqrt{19}+2)}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{3} \quad \text{d'où } a_5 = [x_5] = 2$$

$$x_6 = \frac{1}{x_5 - a_5} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{19}+2}{3} - 2} = \frac{3}{\sqrt{19} - 4} = \frac{3(\sqrt{19}+4)}{3} = \sqrt{19}+4 \quad \text{d'où } a_6 = [x_6] = 8$$

$$x_7 = \frac{1}{x_6 - a_6} = \frac{1}{\sqrt{19} - 4} = x_1 \quad \text{donc } \sqrt{19} = < 4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8} > .$$

Ce calcul montre que le développement en fraction continue de $\sqrt{19}$ est périodique, donc illimité, et que par suite ce nombre est irrationnel.

Dans le calcul ci-dessus on observe des simplifications qui font que le coefficient de $\sqrt{19}$ est toujours 1 et que par suite l'approximation de $\sqrt{19}$ par sa partie entière suffit pour poursuivre. Montrons que ceci est général et que, si $x_0 = \sqrt{N}$ (N entier naturel non carré), la suite définie par récurrence par $x_{k+1} = \dfrac{1}{x_k - a_k}$ où $a_k = [x_k]$ vérifie $x_k = \dfrac{\sqrt{N} + r_k}{s_k}$ avec r_k et s_k entiers naturels tels que l'on ait :

$$a_{k-1}s_{k-1} = r_k + r_{k-1} \quad \text{et} \quad s_k s_{k-1} = N - r_k^2 \quad \text{si } k > 0$$

D'une part, c'est vrai pour $k = 1$, avec $r_0 = 0$, $s_0 = 1$ et $r_1 = a_0$, $s_1 = N - a_0^2$.

D'autre part, ayant ces propriétés au rang k, s_k divise $N - r_k^2$ donc divise $N - r_{k+1}^2$ où l'on pose $r_{k+1} = a_k s_k - r_k$, donc il existe un entier rationnes s_{k+1} tel que $s_k s_{k+1} = N - r_{k+1}^2$ et alors

$$x_{k+1} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{N} + r_k}{s_k} - a_k} = \frac{s_k}{\sqrt{N} - (a_k s_k - r_k)} = \frac{s_k}{\sqrt{N} - r_{k+1}} = \frac{s_k(\sqrt{N} + r_{k+1})}{N - r_{k+1}^2} = \frac{\sqrt{N} + r_{k+1}}{s_{k+1}}$$

De plus, montrons par récurrence que $s_k > 0$ et $\sqrt{N} > r_k$. C'est vrai pour $k = 0$ et, comme $x_k > a_k$, $\dfrac{\sqrt{N} + r_k}{s_k} > a_k$; or, $s_k > 0$, donc $\sqrt{N} + r_k > a_k s_k$, soit $\sqrt{N} > r_{k+1}$.

Et puisque $s_k s_{k+1} = N - r_{k+1}^2 > 0$, on a bien $s_{k+1} > 0$.

Le fait que les r_k soient positifs échappe à la récurrence, prouvons-le par l'absurde :

si $r_k \leqslant 0$, alors $s_{k-1} \leqslant a_{k-1}s_{k-1} = r_k + r_{k-1} \leqslant r_{k-1} < \sqrt{N}$.

Mais $1 > x_{k-1} - a_{k-1} = \dfrac{1}{x_k} = \dfrac{s_k}{\sqrt{N} + r_k} = \dfrac{\sqrt{N} - r_k}{s_{k-1}} \geqslant \dfrac{\sqrt{N}}{s_{k-1}} > 1$. Contradiction.

Donc $r_k > 0$.

Observons que $s_k = \dfrac{r_k + r_{k+1}}{a_k} \leqslant r_k + r_{k+1} < \sqrt{N} + \sqrt{N} = 2\sqrt{N}$, donc que les couples (r_k, s_k) possibles sont au nombre d'au plus $\sqrt{N}.2\sqrt{N} = 2N$, ce qui prouve que la suite de ces couples est périodique à partir d'un certain rang.

Il existe deux entiers n et p tels que pour tout entier k supérieur ou égal à n, $r_k = r_{k+p}$ et $s_k = s_{k+p}$. La période p est donc inférieure à $2N$.

Les outils fournis par le livre X des *Éléments* pouvaient permettre aux géomètres grecs de réaliser des calculs équivalents à ceux qui précèdent et même de simplifier la démonstration ci-dessus. En effet, les démonstrations des propositions 112 et 113, que Bernard VITRAC signale être plus complexes que nécessaire, fournissent les coefficients des deux termes de l'*apotomé* (resp. *binomiale*) inverse de la *binomiale* (resp. *apotomé*) associée, ce qui permet d'en déduire les simplifications par s_k dans les rapports ci-dessus.

De plus les trois information : $r_k < \sqrt{N}$, $s_k > 0$ et $r_k > 0$, qui ont fait l'objet de trois preuves distinctes ci-dessus, sont précisément les trois informations contenues dans les vocables *cinquième binomiale*, ou *cinquième apotomé* et sont donc données simultanément par les propositions 112 ou 113. En somme, le livre X se présente comme étant un outil sur mesure pour étudier l'anthyphérèse de $\sqrt{N}$, question qui, selon PLATON, fut résolue par THÉÉTÈTE.

4 Une autre découverte de Théétète ?

Ce n'est peut-être pas tout, car les observations des développements en fractions continues de $\sqrt{N}$ pour N allant de 3 à 17 permettent de deviner d'autres propriétés remarquables :

– d'une part la période commence juste après le premier terme ;
– d'autre part la période est constituée d'un palindrome suivi du double du premier terme.

Autrement dit, on a toujours $\sqrt{N} =< a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0} >$.

La clef de la preuve moderne de ce résultat, contenu dans la première publication d'Évariste Galois en 1828 (il avait 17 ans), repose sur la notion d'opposé du conjugué de x_k : $x'_k = \dfrac{\sqrt{N} - r_k}{s_k}$ qui est en fait la correspondance entre *cinquième binomiale* et *cinquième apotomé*, laquelle conserve l'addition et le passage à l'inverse.

De $x_k = a_k + \dfrac{1}{x_{k+1}}$ on déduit $\dfrac{1}{x'_{k+1}} = a_k + x'_k$ et comme $s_{k-1} - r_k \leqslant a_{k-1}s_{k-1} - r_k = r_{k-1} < \sqrt{N}$, on a, pour $k > 0$, la majoration $s_{k-1} < \sqrt{N} + r_k$ qui entraîne que $x'_k = \dfrac{s_{k-1}}{\sqrt{N} + r_k}$ est strictement compris entre 0 et 1, donc que $\left[\dfrac{1}{x'_k}\right] = a_k$. Par suite, de $x_n = x_{n+p}$, qui entraîne $x'_n = x'_{n+p}$, on déduit $a_{n-1} = a_{n+p-1}$, d'où $x_{n-1} = x_{n+p-1}$, qui entraîne de la même façon $x_{n-2} = x_{n+p-2}$ et ainsi de suite jusqu'à $x_1 = x_{p+1}$.

Enfin, $x_1 = a_1 + \dfrac{1}{x_2}$; $x_2 = a_2 + \dfrac{1}{x_3}$; $\cdots$ $x_p = a_p + \dfrac{1}{x_1}$; donc $\sqrt{N} =< a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p, x_1 >$.

Et $-x'_1 = a_1 - \dfrac{1}{x'_2}$; $-x'_2 = a_2 - \dfrac{1}{x'_3}$; $\cdots$; $-x'_p = a_1 - \dfrac{1}{x'_1}$ (par l'opposé des conjugués).

D'où $\dfrac{1}{x'_2} = a_1 + \dfrac{1}{\frac{1}{x'_1}}$; $\dfrac{1}{x'_3} = a_2 + \dfrac{1}{\frac{1}{x'_2}}$; $\cdots$; $\dfrac{1}{x'_1} = a_p + \dfrac{1}{\frac{1}{x'_p}}$ et, de $\sqrt{N} = -a_0 + \dfrac{1}{x'_1}$ on obtient :

$$\sqrt{N} =< a_p - a_0, a_{p-1}, a_{p-2}, \ldots, a_1, \frac{1}{x'_1} >$$

ce qui entraîne, en tenant compte des inégalités $x_1 > 1$ et $\dfrac{1}{x'_1} > 1$, les égalités $a_p - a_0 = a_0$, $a_1 = a_{p-1}$, $a_2 = a_{p-2}$, ... Cqfd.

En conclusion, le livre X fournit là encore un instrument permettant de prouver un résultat qu'il était facile de conjecturer à partir d'un petit nombre d'observations numériques accessibles avec les moyens de l'époque. Ne serait-il pas extraordinaire que Théétète ait pu aborder et peut-être traiter une question qui le fut par Galois plus de 2 000 ans plus tard ? Quoi qu'il en soit, l'auteur du livre X était un mathématicien prodigieux si l'on en juge par la complexité et la profondeur de sa réalisation.

Le parallélisme entre ces deux mathématiciens est frappant : morts au même âge, ils se sont intéressés aux mêmes questions algébriques, l'étude des racines de polynômes à coefficients entiers et, dans une certaine mesure, de façon semblable, à savoir sans calculer numériquement ces racines, mais en « *regardant à côté* », « *en voyant autrement* », comme disait Riemann. D'ailleurs, la conjugaison, qui est la correspondance entre la *quatrième binomiale* et la *quatrième apotomé* associée, n'est-elle pas un élément de groupes de Galois ?

5 Une lecture du dialogue de Platon

La réponse de Socrate *« C'est le meilleur résultat que les hommes aient atteint, les enfants »* fait suite à la dernière assertion de Théétète : *« Et si on est dans les volumes on aura une autre distinction du même type »* (*Théétète* 148). Cette affirmation de Platon nous laisse entendre que Théétète savait aussi démontrer l'irrationalité de $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, ..., par anthyphérèse, donc qu'il savait quelque chose sur le développement en fraction continue de ces nombres. Puisque ces nombres ne sont pas des quadratiques, ce développement n'est pas périodique (théorème de Lagrange). Donc la seule possibilité qu'auraient eue les Grecs pour prouver que le développement est illimité était de montrer que les termes a_k ne sont pas bornés. Mais c'est là une question très difficile, qui malgré de nombreuses recherches n'est toujours pas résolue. On ne connaît même pas un seul nombre, en dehors des quadratiques, dont les termes du développement en fraction continue soient tous bornés.

Il faut en conclure que le texte de Platon n'est pas fiable sur le plan mathématique et que son objectif n'était pas de nous donner une leçon de mathématiques ni de nous rendre compte avec précision des découvertes de Théétète mais simplement de nous informer afin de justifier la conclusion de Socrate « Théodore *n'encourra pas de poursuites pour faux témoignage* », donc que Théétète est bien le brillant et exceptionnel esprit décrit par Théodore. Platon a besoin de nous annoncer que ce sont les deux meilleurs esprits de son époque qui vont dialoguer et chercher une réponse à la question : *« qu'est-ce que la connaissance ? »* parce que le dialogue se termine sur une impasse, les trois réponses successives sont tour à tour réfutées et donc si Socrate et Théétète réunis ne peuvent répondre c'est qu'il n'y a pas de réponse à cette question. Conclusion qui sera aussi celle de Kant dans la *Critique de la Raison Pure* : nous pouvons faire des mathématiques ou de la physique mais nous ne pourrons jamais faire de la métaphysique, c'est à dire accéder au savoir transcendantal. Ce à quoi Bergson répondra que Kant a oublié le rôle de l'intuition...

6 L'étude des figures régulières

L'étude de l'anthyphérèse de $\sqrt{N}$ ne suffit pas pour motiver tout le labeur entrepris dans le livre X car nous n'avons pas encore utilisé sa clef de voûte qui est la proposition 111 : une *apotomé* n'est pas une *binomiale*, d'où il résulte la distinction des irrationnels d'Euclide en treize catégories et même en vingt-cinq si l'on compte les quatre hexades. Ceci pouvait servir à étudier la question de l'intersection de trois diagonales d'un polygone régulier, question à la fois simple et naturelle, que l'auteur du livre XIII aborde par exemple dans le pentagone, et qui pouvait aussi être motivée par la chimie de Platon : dans *Timée* 53, Platon découpe les faces des polyèdres réguliers en triangles acutangles.

L'exemple du polygone régulier de douze côtés montre (figure 4) que l'on peut avoir quatre diagonales concourantes, alors que dans celui de quinze côtés (étudié au livre IV des *Éléments*), on trouve trois diagonales qui semblent concourantes (figure 5) et qui en réalité ne le sont pas. L'erreur relative étant en 10^{-3}, elle n'était pas accessible aux moyens de calculs approchés de cette époque, alors que l'utilisation de la proposition 111 permettait de prouver que les deux segments découpés sur une diagonale par les deux autres et pris à partir d'une même extrémité de cette diagonale ne sont pas égaux.

7 Bibliographie

ARTMANN Benno. *Euclid, the creation of mathematics*, Springer 2001.
BURNYEAT Myles. *Introduction au Théétète de* PLATON, Puf 1998.
CAVEING Maurice. *L'irrationalité dans les mathématiques grecques*, Septentrion 1998.
DHOMBRES Jean. *Nombre, mesure et continu*, Cedic-Nathan 1978.
DUVILLIE Bernard. *Sur les traces de l'*homo mathematicus, Ellipses 1999.
GARDIES Jean-Louis. *L'organisation des mathématiques grecques*, Vrin 1997.
KAHANE Jean-Pierre. *À propos de* THÉÉTÈTE, Bulletin UPS 202 d'avril 2003.
NARCY Michel. *Le Théétète*, Garnier-Flammarion 1995.
ROUX Dominique. *Encore* THÉÉTÈTE, Bulletin UPS 203 de juillet 2003.
SZABO Arpad. *L'aube des mathématiques grecques*, Vrin 2000.
TANNERY Paul. *La géométrie grecque*, Gabay 1887.
VITRAC Bernard. EUCLIDE, *les Éléments*, volume 3, Puf 1998.

8 Les figures

FIG. 1 – Cas $N = 2$

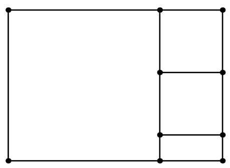

FIG. 2 – Cas $N = 5$

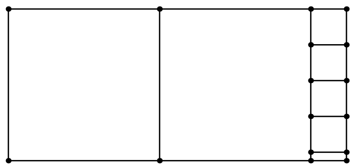

FIG. 3 – Cas $N = 17$

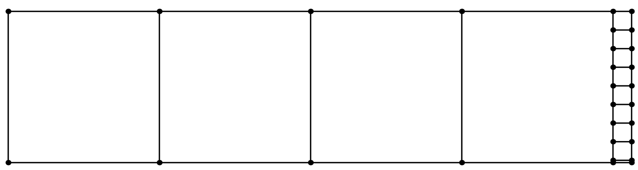

Fig. 4 – Ces quatre diagonales de P12 sont concourantes

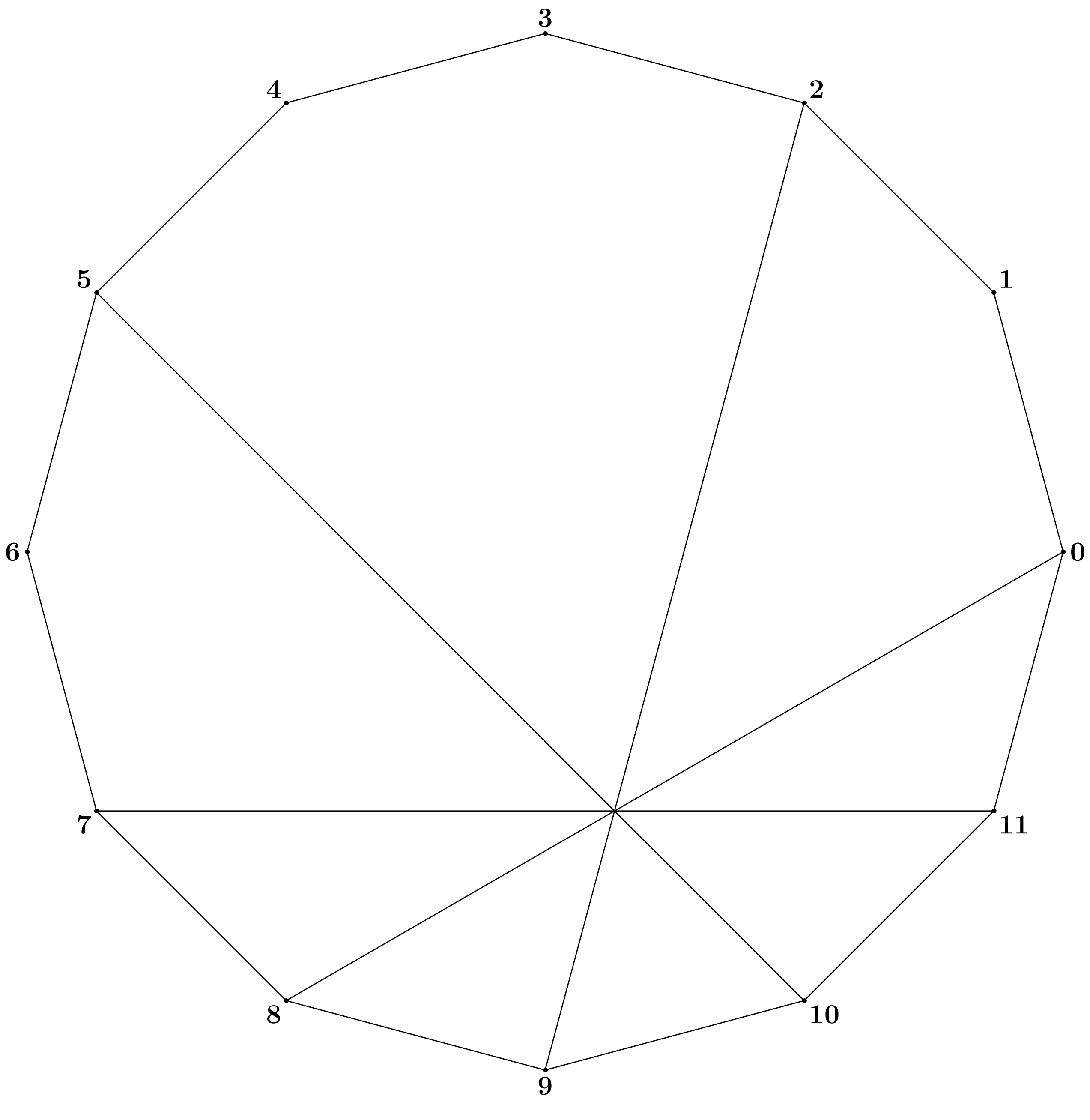

FIG. 5 – Ces trois diagonales de P15 ne sont pas concourantes