Divisibilité

Henry Plane

Avec des caractères de « divisibilité » fondés sur des congruences, reconnaître si un entier est divisible par 17, 23 ou un autre nombre premier n'est pas immédiat. Toutefois, il existe un autre moyen assez simple de répondre à cette question. Voyons-en le principe.

• *N* est-il divisible par 7 ?

Tout entier N comprend d dizaines et u unités et peut s'écrire : $N = 10d + u$.
Si N est divisible par 7, alors $2\,(10d + u)$ l'est aussi et réciproquement puisque 7 ne divise pas 2.
Or $2\,(10d + u) = 20d + 2u = 21d - d + 2u$ $= 21d - (d - 2u)$.
Si $(d - 2u)$ est divisible par 7, comme $21d$ l'est aussi, N le sera.

Une règle se dégage : retrancher du nombre des dizaines le double du nombre (chiffre) des unités et itérer jusqu'à réponse simple.

Prenons un exemple : 5971 est-il divisible par 7 ? 597 – 2 x 1 = 595 ➤
59 – 2 x 5 = 49 qui est bien divisible par 7, donc 7 divise aussi 5971.

• Divisibilité par 13 ?

Comme
$4\,(10d + u) = 40d + 4u = 39d + d + 4u$, pour 13 on usera de la « règle » $(d + 4u)$ car 39 est divisible par 13.

Prenons par exemple 7358 :
7358 ➤ 735 + 4 x 8 = 735 + 32 = 767 ➤
76 + 4 x 7 = 104 ➤ 10 + 4 x 4 = 26.
7358 est donc divisible par 13.

Prenons maintenant 63 044 :
63 044 ➤ 6304 + 16 = 6320 ➤ 632 ➤
63 + 8 = 71 ➤ 7 + 4 = 11.
63044 n'est donc pas divisible par 13.

Attention !
11 n'est pas le reste de la division de 63 044 par 13 (car 63044 = 4849 x 13 + 7).
Ici, ce n'est pas le reste de la division qui est recherché, mais la seule divisibilité de N par 13.

• Idée directrice

En fait, on va rechercher un multiple du diviseur étudié qui ne diffère d'un multiple de 10 que d'une unité.

Ainsi, pour 23 on a : 3 x 23 = 69 = 70 – 1.

La « règle » utilisée sera donc celle de $(d + 7u)$ car $7\,(10d + u) = 69\,d + (d + 7u)$ et 69 est divisible par 23.

Par exemple, 50 531 est-il divisible par 23 ?
50531 ➤ 5053 + 7 = 5060 ➤ 506 ➤
50 + 42 = 92 ➤ 9 + 14 = 23.
50531 est divisible par 23.

Une « règle » se dégage alors :
Si un multiple du diviseur est de la forme $10a + 1$, la « règle » est $d - au$.
Si un multiple du diviseur est $10a - 1$, la « règle » est $d + au$.

Ainsi :
pour 17, comme 3 x 17 = 51 = 50 + 1, la « règle » sera $d - 5u$
pour 19, 19 = 20 – 1 : ce sera donc $d + 2u$
pour 29, 29 = 30 – 1 : ce sera donc $d + 3u$
etc.
On pourrait aller plus loin encore.
101 767 est-il divisible par 149 ? Comme 149 = 150 – 1, on va regarder $d + 15u$…
101 767 ➤ 10176 + 7 x 15 = 10176 + 105 = 10281 ➤ 1028 + 15 = 1043 ➤
104 + 3 x 15 = 104 + 45 = 149 ;
101 767 est multiple de 149.