

# Le planimètre polaire

Bruno Aebischer

Université de Franche-Comté

- L'équation de la cardioïde est, en coordonnées polaires :

$$\rho = 1 + \cos \theta$$

- L'équation de la cardioïde est, en coordonnées polaires :

$$\rho = 1 + \cos \theta$$

avec,  $\theta$  variant sur une période,

- L'équation de la cardioïde est, en coordonnées polaires :

$$\rho = 1 + \cos \theta$$

avec,  $\theta$  variant sur une période, donc  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

- La formule pour calculer l'aire d'un domaine plan limité par les demi-droites  $\theta = \theta_0$ ,  $\theta = \theta_1$  et une courbe définie par une équation polaire  $\rho = \rho(\theta)$  est :

$$\mathcal{A} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\rho^2}{2} d\theta$$

- L'équation de la cardioïde est, en coordonnées polaires :

$$\rho = 1 + \cos \theta$$

avec,  $\theta$  variant sur une période, donc  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

- La formule pour calculer l'aire d'un domaine plan limité par les demi-droites  $\theta = \theta_0$ ,  $\theta = \theta_1$  et une courbe définie par une équation polaire  $\rho = \rho(\theta)$  est :

$$\mathcal{A} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\rho^2}{2} d\theta$$

Donc l'aire de la cardioïde est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{2} d\theta$$

Donc l'aire de la cardioïde est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{2} d\theta$$

Donc l'aire de la cardioïde est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{2} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{3}{4} + \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \right) d\theta \end{aligned}$$

Donc l'aire de la cardioïde est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{2} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{3}{4} + \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

Donc l'aire de la cardioïde est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{2} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{3}{4} + \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{2} \simeq 4,712388981\end{aligned}$$

Donc l'aire de la cardioïde est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{2} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{3}{4} + \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{2} \simeq 4,712388981 \text{ u.a.}\end{aligned}$$

# Calcul de l'aire d'une cardioïde

Donc l'aire de la cardioïde est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{2} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{3}{4} + \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{2} \simeq 4,712388981 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Une unité d'aire valait ici  $5\text{cm} \times 5\text{cm} = 25\text{cm}^2$

# Calcul de l'aire d'une cardioïde

Donc l'aire de la cardioïde est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{2} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{3}{4} + \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{2} \simeq 4,712388981 \text{ u.a.}\end{aligned}$$

Une unité d'aire valait ici  $5\text{cm} \times 5\text{cm} = 25\text{cm}^2$

Donc  $\mathcal{A} \simeq 117,8097245\text{cm}^2$ .

Donc l'aire de la cardioïde est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{2} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{3}{4} + \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{2} \simeq 4,712388981 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Une unité d'aire valait ici  $5\text{cm} \times 5\text{cm} = 25\text{cm}^2$

Donc  $\mathcal{A} \simeq 117,8097245\text{cm}^2$ .

Avec quatre chiffres significatifs :  $\mathcal{A} \simeq 117,8\text{cm}^2$ .

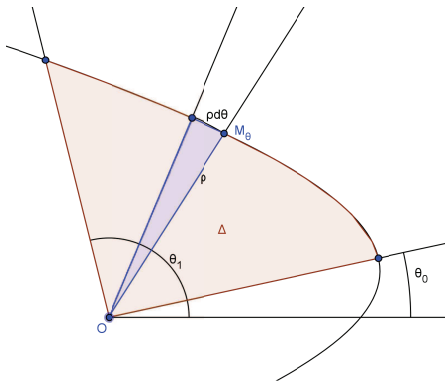
Mais, cette formule de calcul d'aire :

$$\mathcal{A} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\rho^2}{2} d\theta$$

d'où vient-elle ?

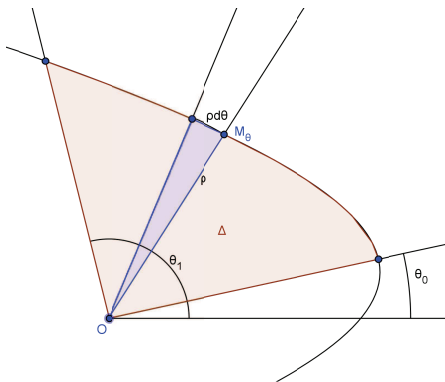
# Explication physique

de la formule du calcul d'aire en coordonnées polaires.



# Explication physique

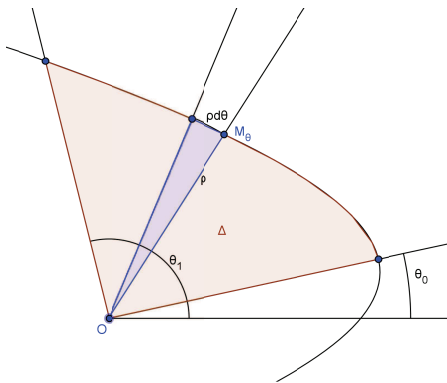
de la formule du calcul d'aire en coordonnées polaires.



L'aire de la partie de plan coloriée en rose est la somme des aires des triangles élémentaires du type du triangle bleu, de hauteur  $\rho = \rho(\theta)$ , de base  $\rho d\theta$ , donc d'aire élémentaire  $\frac{\rho^2}{2} d\theta$ .

# Explication physique

de la formule du calcul d'aire en coordonnées polaires.



L'aire de la partie de plan coloriée en rose est la somme des aires des triangles élémentaires du type du triangle bleu, de hauteur  $\rho = \rho(\theta)$ , de base  $\rho d\theta$ , donc d'aire élémentaire  $\frac{\rho^2}{2} d\theta$ .

Et l'aire de la partie est donc la somme de ces aires élémentaires, calculée grâce à une intégrale : on retrouve bien

$$\mathcal{A} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\rho(\theta)^2}{2} d\theta$$

# Explication mathématique.

Changement de variables dans une intégrale double.

On sait que l'aire d'une partie du plan  $\Delta$  est

$$\mathcal{A}(\Delta) = \iint_{\Delta} dx dy.$$

# Explication mathématique.

Changement de variables dans une intégrale double.

On sait que l'aire d'une partie du plan  $\Delta$  est

$$\mathcal{A}(\Delta) = \iint_{\Delta} dx dy.$$

Mais on connaît la formule de changement de variable, pour passer en polaires :

# Explication mathématique.

Changement de variables dans une intégrale double.

On sait que l'aire d'une partie du plan  $\Delta$  est

$$\mathcal{A}(\Delta) = \iint_{\Delta} dx dy.$$

Mais on connaît la formule de changement de variable, pour passer en polaires : si  $\varphi$  est l'application

$(\rho, \theta) \mapsto (x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ , et si  $\Delta = \varphi(\Delta_0)$ , alors on a

# Explication mathématique.

Changement de variables dans une intégrale double.

On sait que l'aire d'une partie du plan  $\Delta$  est

$$\mathcal{A}(\Delta) = \iint_{\Delta} dx dy.$$

Mais on connaît la formule de changement de variable, pour passer en polaires : si  $\varphi$  est l'application

$(\rho, \theta) \mapsto (x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ , et si  $\Delta = \varphi(\Delta_0)$ , alors on a

$$\mathcal{A}(\Delta) = \iint_{\Delta_0} \rho d\rho d\theta.$$

# Explication mathématique.

Changement de variables dans une intégrale double.

On sait que l'aire d'une partie du plan  $\Delta$  est

$$\mathcal{A}(\Delta) = \iint_{\Delta} dx dy.$$

Mais on connaît la formule de changement de variable, pour passer en polaires : si  $\varphi$  est l'application

$(\rho, \theta) \mapsto (x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ , et si  $\Delta = \varphi(\Delta_0)$ , alors on a

$$\mathcal{A}(\Delta) = \iint_{\Delta_0} \rho d\rho d\theta.$$

# Explication mathématique.

Intégration d'une forme différentielle.

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions de deux variables (régulières). L'objet mathématique  $\omega = P dx + Q dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  est une forme différentielle.

# Explication mathématique.

Intégration d'une forme différentielle.

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions de deux variables (régulières). L'objet mathématique  $\omega = P dx + Q dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  est une forme différentielle.

*C'est-à-dire une application d'une partie de  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}^2)^*$ , le dual de  $\mathbb{R}^2$ , l'ensemble des formes linéaires.*

# Explication mathématique.

## Intégration d'une forme différentielle.

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions de deux variables (régulières). L'objet mathématique  $\omega = P dx + Q dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  est une forme différentielle.

Si  $\gamma$  est un arc paramétré, et que

$\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \longmapsto \psi(t) = (x(t), y(t))$  est une paramétrisation de  $\gamma$ , alors l'intégrale de la forme différentielle le long de  $\gamma$  est

# Explication mathématique.

## Intégration d'une forme différentielle.

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions de deux variables (régulières). L'objet mathématique  $\omega = P dx + Q dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  est une forme différentielle.

Si  $\gamma$  est un arc paramétré, et que

$\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \longmapsto \psi(t) = (x(t), y(t))$  est une paramétrisation de

$\gamma$ , alors l'intégrale de la forme différentielle le long de  $\gamma$  est

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \left( P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt$$

# Explication mathématique.

## Intégration d'une forme différentielle.

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions de deux variables (régulières). L'objet mathématique  $\omega = P dx + Q dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  est une forme différentielle.

Si  $\gamma$  est un arc paramétré, et que

$\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \longmapsto \psi(t) = (x(t), y(t))$  est une paramétrisation de

$\gamma$ , alors l'intégrale de la forme différentielle le long de  $\gamma$  est

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \left( P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt$$

# Explication mathématique.

## Intégration d'une forme différentielle.

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions de deux variables (régulières). L'objet mathématique  $\omega = P dx + Q dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  est une forme différentielle.

Si  $\gamma$  est un arc paramétré, et que

$\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \longmapsto \psi(t) = (x(t), y(t))$  est une paramétrisation de

$\gamma$ , alors l'intégrale de la forme différentielle le long de  $\gamma$  est

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \left( P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt$$

Ça ne dépend pas de la paramétrisation, à condition de garder le même sens de parcours.

# Explication mathématique.

Circulation d'un champ de vecteurs.

Un champ de vecteurs  $\vec{V}$  est une application du plan affine  $E$  vers le plan vectoriel  $\vec{E}$ .

# Explication mathématique.

Circulation d'un champ de vecteurs.

Un champ de vecteurs  $\vec{V}$  est une application du plan affine  $E$  vers le plan vectoriel  $\vec{E}$ .

Après avoir fixé un repère cartésien de  $E$ ,  $\vec{V}$  est caractérisé par ses deux composantes  $(P, Q)$ ;

# Explication mathématique.

## Circulation d'un champ de vecteurs.

Un champ de vecteurs  $\vec{V}$  est une application du plan affine  $E$  vers le plan vectoriel  $\vec{E}$ .

Après avoir fixé un repère cartésien de  $E$ ,  $\vec{V}$  est caractérisé par ses deux composantes  $(P, Q)$ ;

$P = P(x, y)$  et  $Q = Q(x, y)$  sont deux fonctions de deux variables.

# Explication mathématique.

## Circulation d'un champ de vecteurs.

Un champ de vecteurs  $\vec{V}$  est une application du plan affine  $E$  vers le plan vectoriel  $\vec{E}$ .

Après avoir fixé un repère cartésien de  $E$ ,  $\vec{V}$  est caractérisé par ses deux composantes  $(P, Q)$ ;

$P = P(x, y)$  et  $Q = Q(x, y)$  sont deux fonctions de deux variables.

*De même, une forme différentielle  $\omega = P dx + Q dy$  était caractérisée par ses deux fonctions composantes  $P$  et  $Q$ .*

# Explication mathématique.

Circulation d'un champ de vecteurs.

Un champ de vecteurs  $\vec{V}$  est une application du plan affine  $E$  vers le plan vectoriel  $\vec{E}$ .

Après avoir fixé un repère cartésien de  $E$ ,  $\vec{V}$  est caractérisé par ses deux composantes  $(P, Q)$ ;

$P = P(x, y)$  et  $Q = Q(x, y)$  sont deux fonctions de deux variables.

*De même, une forme différentielle  $\omega = P dx + Q dy$  était caractérisée par ses deux fonctions composantes  $P$  et  $Q$ .*

# Explication mathématique.

Circulation d'un champ de vecteurs.

La circulation du champ de vecteurs  $\vec{V}$  le long de l'arc  $\gamma$  paramétré  
par  $\psi : \begin{array}{l} [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \psi(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$

# Explication mathématique.

Circulation d'un champ de vecteurs.

La circulation du champ de vecteurs  $\vec{V}$  le long de l'arc  $\gamma$  paramétré  
par  $\psi : \begin{array}{l} [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \psi(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$  est l'intégrale

# Explication mathématique.

Circulation d'un champ de vecteurs.

La circulation du champ de vecteurs  $\vec{V}$  le long de l'arc  $\gamma$  paramétré  
par  $\psi : \begin{array}{l} [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \psi(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$  est l'intégrale

$$\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M} = \int_a^b \left( P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt$$

# Explication mathématique.

## Circulation d'un champ de vecteurs.

La circulation du champ de vecteurs  $\vec{V}$  le long de l'arc  $\gamma$  paramétré par  $\psi : \begin{array}{l} [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \psi(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$  est l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M} &= \int_a^b \left( P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \overrightarrow{V(\psi(t))} \cdot \overrightarrow{\psi'(t)} dt \end{aligned}$$

# Explication mathématique.

## Circulation d'un champ de vecteurs.

La circulation du champ de vecteurs  $\vec{V}$  le long de l'arc  $\gamma$  paramétré par  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \mapsto \psi(t) = (x(t), y(t)) = M(t)$  est l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M} &= \int_a^b \left( P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \overrightarrow{V(\psi(t))} \cdot \overrightarrow{\psi'(t)} dt \\ &= \int_a^b \overrightarrow{V(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt\end{aligned}$$

# Explication mathématique.

Circulation d'un champ de vecteurs.

La circulation du champ de vecteurs  $\vec{V}$  le long de l'arc  $\gamma$  paramétré par  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \mapsto \psi(t) = (x(t), y(t)) = M(t)$  est l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M} &= \int_a^b \left( P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \overrightarrow{V(\psi(t))} \cdot \overrightarrow{\psi'(t)} dt \\ &= \int_a^b \overrightarrow{V(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt\end{aligned}$$

*C'est la même valeur que pour  $\int_{\gamma} \omega$ , lorsque  $\omega = P dx + Q dy$*

# Explication mathématique.

## Circulation d'un champ de vecteurs.

La circulation du champ de vecteurs  $\vec{V}$  le long de l'arc  $\gamma$  paramétré par  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \mapsto \psi(t) = (x(t), y(t)) = M(t)$  est l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M} &= \int_a^b \left( P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \overrightarrow{V(\psi(t))} \cdot \overrightarrow{\psi'(t)} dt \\ &= \int_a^b \overrightarrow{V(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt\end{aligned}$$

C'est la même valeur que pour  $\int_{\gamma} \omega$ , lorsque  $\omega = P dx + Q dy$

# Explication mathématique.

Formes différentielles et Champs de vecteurs.

Une forme différentielle  $\omega = P dx + Q dy$  et un champ de vecteurs  $\vec{V}(P, Q)$  de mêmes fonctions composantes  $(P, Q)$  sont deux aspects du même objet mathématique.

# Explication mathématique.

Formes différentielles et Champs de vecteurs.

Une forme différentielle  $\omega = P dx + Q dy$  et un champ de vecteurs  $\vec{V}(P, Q)$  de mêmes fonctions composantes  $(P, Q)$  sont deux aspects du même objet mathématique.

Sur un arc paramétré  $\gamma$ , l'intégrale curviligne de  $\omega$  est exactement la même chose que la circulation du champ  $\vec{V}$  sur ce même arc.

# Explication mathématique.

Formes différentielles et Champs de vecteurs.

Une forme différentielle  $\omega = P dx + Q dy$  et un champ de vecteurs  $\vec{V}(P, Q)$  de mêmes fonctions composantes  $(P, Q)$  sont deux aspects du même objet mathématique.

Sur un arc paramétré  $\gamma$ , l'intégrale curviligne de  $\omega$  est exactement la même chose que la circulation du champ  $\vec{V}$  sur ce même arc.

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M}$$

### La formule de Green-Riemann

# Explication mathématique.

Formule de Green-Riemann.

La **formule de Green-Riemann** dit que, si  
 $\omega = P \, du + Q \, dv = P(u, v) \, du + Q(u, v) \, dv$  est une forme  
différentielle,

# Explication mathématique.

Formule de Green-Riemann.

La **formule de Green-Riemann** dit que, si  $\omega = P \, du + Q \, dv = P(u, v) \, du + Q(u, v) \, dv$  est une forme différentielle, si  $\Omega$  est un domaine régulier,

# Explication mathématique.

## Formule de Green-Riemann.

La **formule de Green-Riemann** dit que, si  $\omega = P \, du + Q \, dv = P(u, v) \, du + Q(u, v) \, dv$  est une forme différentielle, si  $\Omega$  est un domaine régulier, de frontière régulière  $\partial\Omega$ , paramétrée dans le sens positif, (sens trigonométrique)

# Explication mathématique.

## Formule de Green-Riemann.

La **formule de Green-Riemann** dit que, si  $\omega = P \, du + Q \, dv = P(u, v) \, du + Q(u, v) \, dv$  est une forme différentielle, si  $\Omega$  est un domaine régulier, de frontière régulière  $\partial\Omega$ , paramétrée dans le sens positif, (sens trigonométrique) alors on a

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega} P \, du + Q \, dv = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) \, du \, dv.$$

# Explication mathématique.

## Formule de Green-Riemann.

La **formule de Green-Riemann** dit que, si  $\omega = P \, du + Q \, dv = P(u, v) \, du + Q(u, v) \, dv$  est une forme différentielle, si  $\Omega$  est un domaine régulier, de frontière régulière  $\partial\Omega$ , **paramétrée dans le sens positif**, (sens trigonométrique) alors on a

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega} P \, du + Q \, dv = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) \, du \, dv.$$

# Explication mathématique.

## Formule de Green-Riemann.

La **formule de Green-Riemann** dit que, si  $\omega = P \, du + Q \, dv = P(u, v) \, du + Q(u, v) \, dv$  est une forme différentielle, si  $\Omega$  est un domaine régulier, de frontière régulière  $\partial\Omega$ , **paramétrée dans le sens positif**, (sens trigonométrique) alors on a

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega} P \, du + Q \, dv = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) \, du \, dv.$$

*On peut aussi donner une version « champs vectoriels » de la formule de Green-Riemann.*

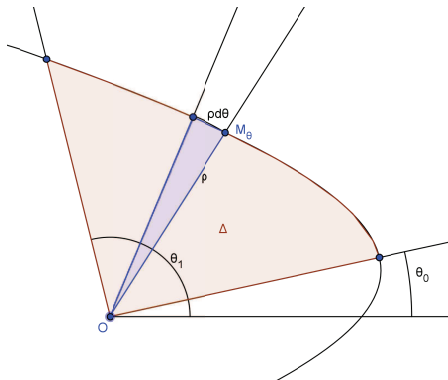
# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Lorsque le domaine  $\Delta$  dont on cherche l'aire est celui de la figure précédente :

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.



# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Lorsque le domaine  $\Delta$  dont on cherche l'aire est celui de la figure précédente, on a  $\Delta = \varphi(\Delta_0)$  avec  $\Delta_0$  caractérisé par

$$\begin{cases} \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0 \leq \rho \leq \rho(\theta) \end{cases}$$

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

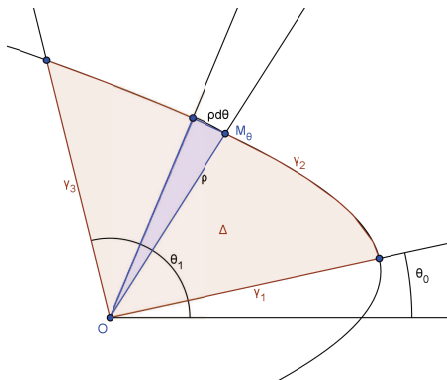
Lorsque le domaine  $\Delta$  dont on cherche l'aire est celui de la figure précédente, on a  $\Delta = \varphi(\Delta_0)$  avec  $\Delta_0$  caractérisé par

$$\begin{cases} \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0 \leq \rho \leq \rho(\theta) \end{cases}$$

Paramétrons son contour  $\partial\Delta_0$ , qui décompose en 3 arcs  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

# Explication mathématique.

## Calcul d'aire en coordonnées polaires.



# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Lorsque le domaine  $\Delta$  dont on cherche l'aire est celui de la figure précédente, on a  $\Delta = \varphi(\Delta_0)$  avec  $\Delta_0$  caractérisé par

$$\begin{cases} \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0 \leq \rho \leq \rho(\theta) \end{cases}$$

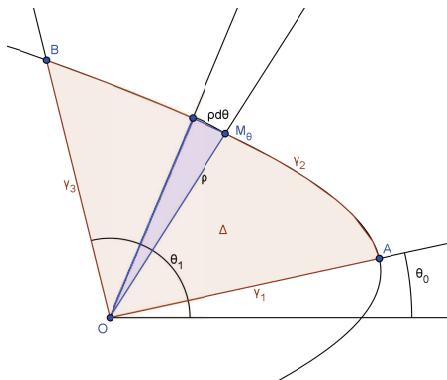
Paramétrons son contour  $\partial\Delta_0$ , qui décompose en 3 arcs  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

Avec  $\gamma_1 = [OA]$  caractérisé par :

$$\begin{cases} \rho = r \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \quad r \in [0, \rho(\theta_0)]$$

# Explication mathématique.

## Calcul d'aire en coordonnées polaires.



# Explication mathématique.

## Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Lorsque le domaine  $\Delta$  dont on cherche l'aire est celui de la figure précédente, on a  $\Delta = \varphi(\Delta_0)$  avec  $\Delta_0$  caractérisé par

$$\begin{cases} \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0 \leq \rho \leq \rho(\theta) \end{cases}$$

Paramétrons son contour  $\partial\Delta_0$ , qui décompose en 3 arcs  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

Avec  $\gamma_1 = [OA]$  caractérisé par :

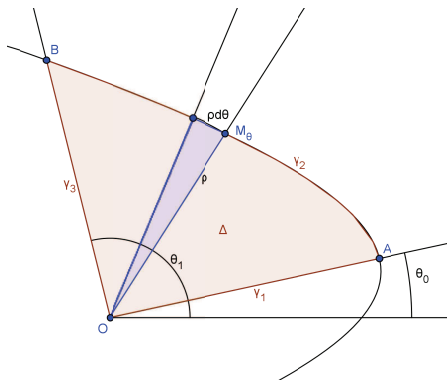
$$\begin{cases} \rho = r \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \quad r \in [0, \rho(\theta_0)]$$

et  $\gamma_2 = \widehat{AB}$  est caractérisé par :

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = t \end{cases} \quad t \in [\theta_0, \theta_1]$$

# Explication mathématique.

## Calcul d'aire en coordonnées polaires.



# Explication mathématique.

## Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Lorsque le domaine  $\Delta$  dont on cherche l'aire est celui de la figure précédente, on a  $\Delta = \varphi(\Delta_0)$  avec  $\Delta_0$  caractérisé par

$$\begin{cases} \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0 \leq \rho \leq \rho(\theta) \end{cases}$$

Paramétrons son contour  $\partial\Delta_0$ , qui décompose en 3 arcs  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

Avec  $\gamma_1 = [OA]$  caractérisé par :

$$\begin{cases} \rho = r \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \quad r \in [0, \rho(\theta_0)]$$

et  $\gamma_2 = \widehat{AB}$  est caractérisé par :

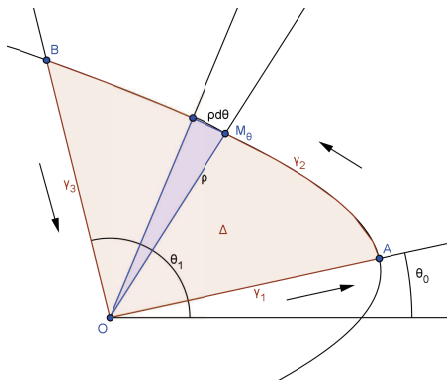
$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = t \end{cases} \quad t \in [\theta_0, \theta_1]$$

et enfin  $\gamma_3 = [BO]$  caractérisé par :

$$\begin{cases} \rho = r \\ \theta = \theta_1 \end{cases} \quad r \in [0, \rho(\theta_1)]$$

# Explication mathématique.

## Calcul d'aire en coordonnées polaires.



# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Lorsque le domaine  $\Delta$  dont on cherche l'aire est celui de la figure précédente, on a  $\Delta = \varphi(\Delta_0)$  avec  $\Delta_0$  caractérisé par

$$\begin{cases} \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0 \leq \rho \leq \rho(\theta) \end{cases}$$

Paramétrons son contour  $\partial\Delta_0$ , qui se décompose en 3 arcs  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

Avec  $\gamma_1 = [OA]$  caractérisé par :

$$\begin{cases} \rho = r \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \quad r \in [0, \rho(\theta_0)]$$

et  $\gamma_2 = \widehat{AB}$  est caractérisé par :

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = t \end{cases} \quad t \in [\theta_0, \theta_1]$$

et enfin  $\gamma_3 = [BO]$  caractérisé par :

$$\begin{cases} \rho = r \\ \theta = \theta_1 \end{cases} \quad r \in [0, \rho(\theta_1)]$$

Mais  $\gamma_3$  est dans le mauvais sens !

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Lorsque le domaine  $\Delta$  dont on cherche l'aire est celui de la figure précédente, on a  $\Delta = \varphi(\Delta_0)$  avec  $\Delta_0$  caractérisé par

$$\begin{cases} \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0 \leq \rho \leq \rho(\theta) \end{cases}$$

Paramétrons son contour  $\partial\Delta_0$ , qui se décompose en 3 arcs  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

Avec  $\gamma_1 = [OA]$  caractérisé par :

$$\begin{cases} \rho = r \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \quad r \in [0, \rho(\theta_0)]$$

et  $\gamma_2 = \widehat{AB}$  est caractérisé par :

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = t \end{cases} \quad t \in [\theta_0, \theta_1]$$

et enfin  $\gamma_3 = [BO]$  caractérisé par :

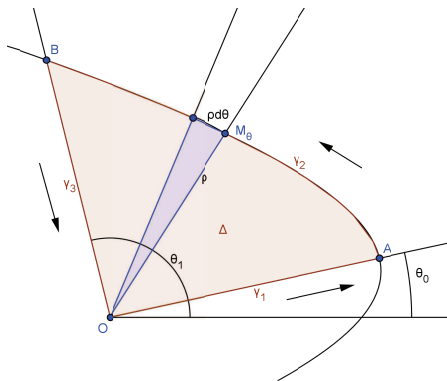
$$\begin{cases} \rho = r \\ \theta = \theta_1 \end{cases} \quad r \in [0, \rho(\theta_1)]$$

Mais  $\gamma_3$  est dans le mauvais sens !

On comptera donc négativement l'apport de  $\gamma_3$ .

# Explication mathématique.

## Calcul d'aire en coordonnées polaires.



# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

$$\text{Posons } \omega = \frac{\rho^2}{2} d\theta$$

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Posons  $\omega = \frac{\rho^2}{2} d\theta$  (c'est bien une forme différentielle en les variables  $\rho$  et  $\theta$ ).

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Posons  $\omega = \frac{\rho^2}{2} d\theta$  (c'est bien une forme différentielle en les variables  $\rho$  et  $\theta$ ).

On calcule de deux manières différentes :

$$\int_{\partial\Delta_0} \omega$$

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Posons  $\omega = \frac{\rho^2}{2} d\theta$  (c'est bien une forme différentielle en les variables  $\rho$  et  $\theta$ ).

On calcule de deux manières différentes :

$$\int_{\partial\Delta_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_3} \omega$$

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Formule pour intégrer une forme différentielle  $\omega = P \, du + Q \, dv$  :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left( P(u(t), v(t)) u'(t) + Q(u(t), v(t)) v'(t) \right) dt$$

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Formule pour intégrer une forme différentielle  $\omega = P \, du + Q \, dv$  :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left( P(u(t), v(t)) u'(t) + Q(u(t), v(t)) v'(t) \right) dt$$

On veut calculer  $\int_{\gamma_i} \omega = \int_{\gamma_i} \frac{\rho^2}{2} d\theta$ ,

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Formule pour intégrer une forme différentielle  $\omega = P du + Q dv$  :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left( P(u(t), v(t)) u'(t) + Q(u(t), v(t)) v'(t) \right) dt$$

On veut calculer  $\int_{\gamma_i} \omega = \int_{\gamma_i} \frac{\rho^2}{2} d\theta$ , et ici :

- $\gamma_1$  : 
$$\begin{cases} \rho = r \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \quad r \in [0, \rho(\theta_0)]$$

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Formule pour intégrer une forme différentielle  $\omega = P du + Q dv$  :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left( P(u(t), v(t)) u'(t) + Q(u(t), v(t)) v'(t) \right) dt$$

On veut calculer  $\int_{\gamma_i} \omega = \int_{\gamma_i} \frac{\rho^2}{2} d\theta$ , et ici :

- $\gamma_2$  : 
$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = t \end{cases} \quad t \in [\theta_0, \theta_1]$$

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Formule pour intégrer une forme différentielle  $\omega = P du + Q dv$  :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left( P(u(t), v(t)) u'(t) + Q(u(t), v(t)) v'(t) \right) dt$$

On veut calculer  $\int_{\gamma_i} \omega = \int_{\gamma_i} \frac{\rho^2}{2} d\theta$ , et ici :

- $\gamma_3$  : 
$$\begin{cases} \rho = r \\ \theta = \theta_1 \end{cases} \quad r \in [0, \rho(\theta_1)]$$

# Explication mathématique.

## Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Formule pour intégrer une forme différentielle  $\omega = P du + Q dv$  :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left( P(u(t), v(t)) u'(t) + Q(u(t), v(t)) v'(t) \right) dt$$

On veut calculer  $\int_{\gamma_i} \omega = \int_{\gamma_i} \frac{\rho^2}{2} d\theta$ , et ici :

- $\gamma_1$  : 
$$\begin{cases} \rho = r \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \quad r \in [0, \rho(\theta_0)]$$

- $\gamma_2$  : 
$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = t \end{cases} \quad t \in [\theta_0, \theta_1]$$

- $\gamma_3$  : 
$$\begin{cases} \rho = r \\ \theta = \theta_1 \end{cases} \quad r \in [0, \rho(\theta_1)]$$

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

$$\text{Posons } \omega = \frac{\rho^2}{2} d\theta$$

(c'est bien une forme différentielle en les variables  $\rho$  et  $\theta$ ).

On calcule de deux manières différentes :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta_0} \omega &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_3} \omega \\ &= \int_0^{\rho(\theta_0)} \frac{r^2}{2} \cdot 0 \, dr + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\rho(t)^2}{2} \cdot 1 \, dt - \int_0^{\rho(\theta_1)} \frac{r^2}{2} \cdot 0 \, dr \end{aligned}$$

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

$$\text{Posons } \omega = \frac{\rho^2}{2} d\theta$$

(c'est bien une forme différentielle en les variables  $\rho$  et  $\theta$ ).

On calcule de deux manières différentes :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta_0} \omega &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_3} \omega \\ &= \int_0^{\rho(\theta_0)} \frac{r^2}{2} \cdot 0 \, dr + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\rho(t)^2}{2} \cdot 1 \, dt - \int_0^{\rho(\theta_1)} \frac{r^2}{2} \cdot 0 \, dr \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\rho(\theta)^2}{2} \, d\theta.\end{aligned}$$

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Maintenant avec Green-Riemann :

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Maintenant avec Green-Riemann :

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega} P \, du + Q \, dv = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) \, du \, dv$$

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Maintenant avec Green-Riemann :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \omega &= \int_{\partial\Omega} P \, du + Q \, dv = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} D\omega \, du \, dv \quad (\text{en posant } D\omega = \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}).\end{aligned}$$

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Maintenant avec Green-Riemann :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \omega &= \int_{\partial\Omega} P \, du + Q \, dv = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} D\omega \, du \, dv \quad (\text{en posant } D\omega = \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}).\end{aligned}$$

Ici  $u = \rho$ ,  $v = \theta$ ,  $\omega = \frac{1}{2}\rho^2 \, d\theta$  donc  $D\omega = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho^2}{2} \right) = \rho$ .

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

Maintenant avec Green-Riemann :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \omega &= \int_{\partial\Omega} P \, du + Q \, dv = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} D\omega \, du \, dv \quad (\text{en posant } D\omega = \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}).\end{aligned}$$

Ici  $u = \rho$ ,  $v = \theta$ ,  $\omega = \frac{1}{2}\rho^2 \, d\theta$  donc  $D\omega = \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \frac{\rho^2}{2} \right) = \rho$ .

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta_0} \frac{\rho^2}{2} \, d\theta &= \iint_{\Delta_0} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \frac{\rho^2}{2} \right) \, d\rho \, d\theta \\ &= \iint_{\Delta_0} \rho \, d\rho \, d\theta = \mathcal{A}(\Delta).\end{aligned}$$

# Explication mathématique.

Calcul d'aire en coordonnées polaires.

On a bien prouvé ce qu'on voulait démontrer :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\rho(\theta)^2}{2} d\theta$$

Si  $\omega' = P'(\rho, \theta) d\rho + Q'(\rho, \theta) d\theta$  est une autre forme différentielle mais qui est exacte, c'est-à-dire vérifiant  $D\omega' = \frac{\partial Q'}{\partial \rho} - \frac{\partial P'}{\partial \theta} = 0$ , alors  $\omega'' = \omega + \omega'$  sera aussi telle que  $\int_{\Delta_0} \omega'' = \mathcal{A}(\Delta)$ .

Si  $\omega' = P'(\rho, \theta) d\rho + Q'(\rho, \theta) d\theta$  est une autre forme différentielle mais qui est exacte, c'est-à-dire vérifiant  $D\omega' = \frac{\partial Q'}{\partial \rho} - \frac{\partial P'}{\partial \theta} = 0$ ,

alors  $\omega'' = \omega + \omega'$  sera aussi telle que  $\int_{\Delta_0} \omega'' = \mathcal{A}(\Delta)$ .

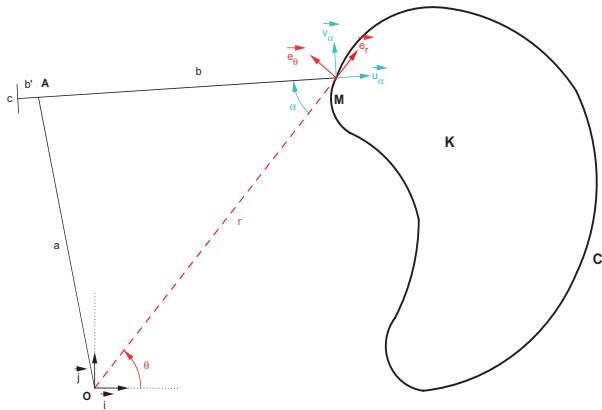
Puisque  $D\omega'' = D\omega + D\omega' = D\omega = \rho$

Si  $\omega' = P'(\rho, \theta) d\rho + Q'(\rho, \theta) d\theta$  est une autre forme différentielle mais qui est exacte, c'est-à-dire vérifiant  $D\omega' = \frac{\partial Q'}{\partial \rho} - \frac{\partial P'}{\partial \theta} = 0$ , alors  $\omega'' = \omega + \omega'$  sera aussi telle que  $\int_{\Delta_0} \omega'' = \mathcal{A}(\Delta)$ .

Le planimètre polaire intègre une forme différentielle  $\omega''$  qui est du type  $\omega + \omega' = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta + \omega'$

# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.



# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.

Remarque :

La formule  $\mathcal{A}(K) = \int_{\partial K_0} \frac{r^2}{2} d\theta$  se prouve par différence :

# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.

Remarque :

La formule  $\mathcal{A}(K) = \int_{\partial K_0} \frac{r^2}{2} d\theta$  se prouve par différence :

$$\mathcal{A}(K) = \mathcal{A}(K_1) - \mathcal{A}(K_2) = \int_{C_1} \frac{r^2}{2} d\theta - \int_{C_2} \frac{r^2}{2} d\theta = \int_C \frac{r^2}{2}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.

Remarque :

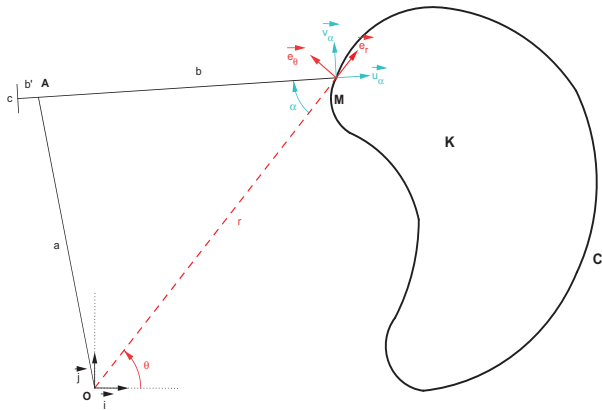
La formule  $\mathcal{A}(K) = \int_{\partial K_0} \frac{r^2}{2} d\theta$  se prouve par différence :

$$\mathcal{A}(K) = \mathcal{A}(K_1) - \mathcal{A}(K_2) = \int_{C_1} \frac{r^2}{2} d\theta - \int_{C_2} \frac{r^2}{2} d\theta = \int_C \frac{r^2}{2}$$

Il faudrait écrire  $C_0, C_{1,0}, C_{2,0} \dots$ , car ces contours doivent être paramétrés en coordonnées polaires.

# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.



# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.

Notations :

# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.

Notations :

Longueur du premier bras  $[OA]$  :  $a$  ;

# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.

Notations :

Longueur du premier bras  $[OA]$  :  $a$  ;

Longueur du second bras  $[BM]$  :  $b$  ;

# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.

Notations :

Longueur du premier bras  $[OA]$  :  $a$  ;

Longueur du second bras  $[BM]$  :  $b$  ;

Angle (orienté) entre le rayon  $\overrightarrow{OM}$  et le second bras :

# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.

Notations :

Longueur du premier bras  $[OA]$  :  $a$  ;

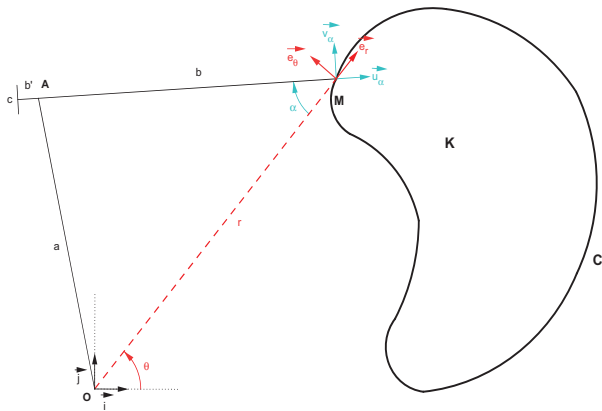
Longueur du second bras  $[BM]$  :  $b$  ;

Angle (orienté) entre le rayon  $\overrightarrow{OM}$  et le second bras :

$$\alpha = (\overrightarrow{OM}, \vec{u}_\alpha) = (\vec{e}_r, \vec{u}_\alpha) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM}) \text{ (ici } \alpha \text{ est négatif)}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.



# Fonctionnement du planimètre.

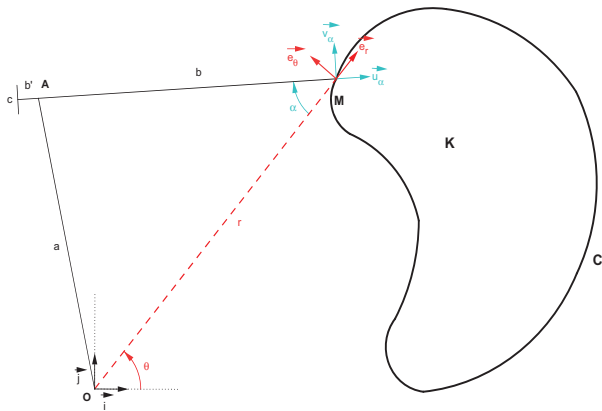
Approche physique.

On étudie le déplacement de la roue pendant un déplacement infinitésimal  $\overrightarrow{dM}$  du point  $M$  long de  $C$ . On note  $(dx, dy)$  les coordonnées de  $\overrightarrow{dM}$  dans  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Les coordonnées de  $\overrightarrow{dM}$  dans  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  sont donc  $(dr, r d\theta)$ .

# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.



# Fonctionnement du planimètre.

Approche physique.

Idée fondamentale : La roulette  $c$  se déplace proportionnellement à la composante selon  $\vec{v}_\alpha$  de  $\overrightarrow{dM}$  ;

# Fonctionnement du planimètre.

Approche physique.

Idée fondamentale : La roulette  $c$  se déplace proportionnellement à la composante selon  $\vec{v}_\alpha$  de  $\vec{dM}$  ;

On trouve la valeur de cette composante à l'aide du produit scalaire  $\vec{v}_\alpha \cdot \vec{dM}$ .

# Fonctionnement du planimètre.

Approche physique.

Idée fondamentale : La roulette  $c$  se déplace proportionnellement à la composante selon  $\vec{v}_\alpha$  de  $\vec{dM}$  ;

On trouve la valeur de cette composante à l'aide du produit scalaire  $\vec{v}_\alpha \cdot \vec{dM}$ .

Le déplacement total de la roulette pendant un tour le long de  $C$  est la somme de déplacements élémentaires donc c'est l'intégrale :

$$I = \mathcal{P}(K) = \int_C \vec{v}_\alpha \cdot \vec{dM}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Approche physique.

Idee fondamentale : La roulette  $c$  se déplace proportionnellement à la composante selon  $\vec{v}_\alpha$  de  $\vec{dM}$  ;

On trouve la valeur de cette composante à l'aide du produit scalaire  $\vec{v}_\alpha \cdot \vec{dM}$ .

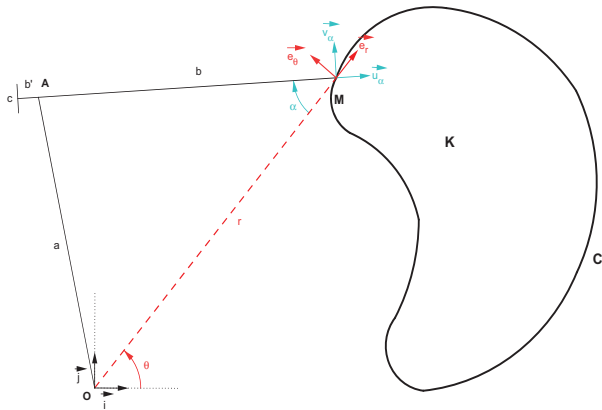
Le déplacement total de la roulette pendant un tour le long de  $C$  est la somme de déplacements élémentaires donc c'est l'intégrale :

$$I = \mathcal{P}(K) = \int_C \vec{v}_\alpha \cdot \vec{dM}$$

On reconnaît la circulation du champ de vecteur  $\vec{v}_\alpha$  le long de  $C$ .

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.



# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

$\vec{v}_\alpha$  dépend du point  $M$  qui lui-même dépend du paramètre  $t$  utilisé pour paramétrer  $C$ .

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

$\vec{v}_\alpha$  dépend du point  $M$  qui lui-même dépend du paramètre  $t$  utilisé pour paramétrer  $C$ . On note  $\vec{v}_\alpha = \overrightarrow{v_\alpha(M(t))}$ .

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

$\vec{v}_\alpha$  dépend du point  $M$  qui lui-même dépend du paramètre  $t$  utilisé pour paramétrer  $C$ . On note  $\vec{v}_\alpha = \overrightarrow{v_\alpha(M(t))}$ .  
On suppose que  $t$  est le temps.

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

$\vec{v}_\alpha$  dépend du point  $M$  qui lui-même dépend du paramètre  $t$  utilisé pour paramétrer  $C$ . On note  $\vec{v}_\alpha = \overrightarrow{v_\alpha(M(t))}$ .

On suppose que  $t$  est le temps.

Soit  $f$  la fonction qui donne le nombre affiché par le planimètre en fonction de  $t$ .

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

$\vec{v}_\alpha$  dépend du point  $M$  qui lui-même dépend du paramètre  $t$  utilisé pour paramétrer  $C$ . On note  $\vec{v}_\alpha = \overrightarrow{v_\alpha(M(t))}$ .

On suppose que  $t$  est le temps.

Soit  $f$  la fonction qui donne le nombre affiché par le planimètre en fonction de  $t$ .

$f(t)$  est proportionnelle à la distance parcourue par le point de contact de la roulette depuis l'instant initial.

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

$\vec{v}_\alpha$  dépend du point  $M$  qui lui-même dépend du paramètre  $t$  utilisé pour paramétrer  $C$ . On note  $\vec{v}_\alpha = \overrightarrow{v_\alpha(M(t))}$ .

On suppose que  $t$  est le temps.

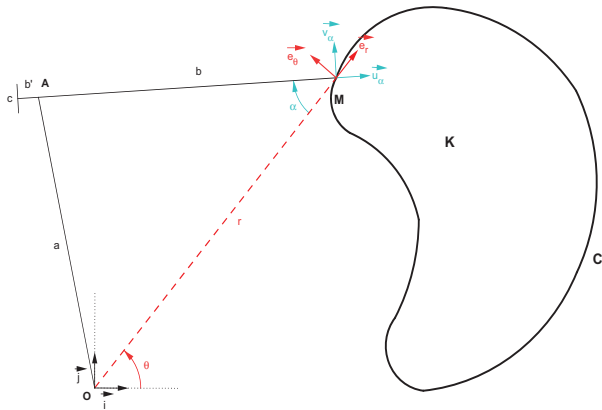
Soit  $f$  la fonction qui donne le nombre affiché par le planimètre en fonction de  $t$ .

$f(t)$  est proportionnelle à la distance parcourue par le point de contact de la roulette depuis l'instant initial.

et  $f'(t)$  est proportionnelle à la vitesse de rotation de la roulette.

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.



# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

La roulette ne tourne que dans une direction : celle de  $\overrightarrow{v_\alpha(M(t))}$ ,

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

La roulette ne tourne que dans une direction : celle de  $\overrightarrow{v_\alpha(M(t))}$ , donc  $f'(t)$ , proportionnelle à la vitesse de rotation de la roulette,

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

La roulette ne tourne que dans une direction : celle de  $\overrightarrow{v_\alpha(M(t))}$ , donc  $f'(t)$ , proportionnelle à la vitesse de rotation de la roulette, est proportionnelle

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

La roulette ne tourne que dans une direction : celle de  $\overrightarrow{v_\alpha(M(t))}$ , donc  $f'(t)$ , proportionnelle à la vitesse de rotation de la roulette, est proportionnelle non pas à la vitesse de déplacement du pointeur  $M(t)$ ,

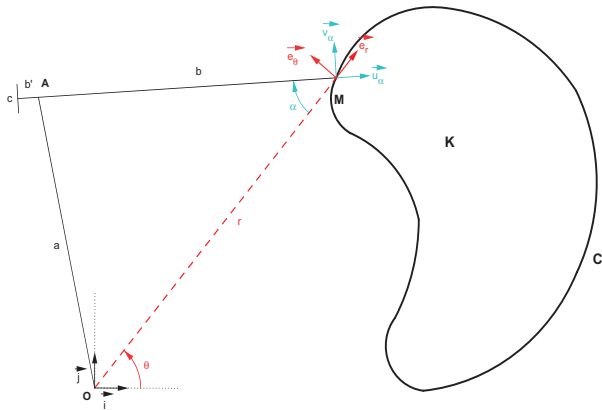
# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

La roulette ne tourne que dans une direction : celle de  $\overrightarrow{v_\alpha(M(t))}$ , donc  $f'(t)$ , proportionnelle à la vitesse de rotation de la roulette, est proportionnelle non pas à la vitesse de déplacement du pointeur  $M(t)$ , mais uniquement à la composante selon  $\overrightarrow{v_\alpha(M(t))}$  de cette vitesse.

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.



# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

Donc  $f'(t) = k \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)}$ . On note  $k$  le coefficient de proportionnalité.

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

Donc  $f'(t) = k \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)}$ . On note  $k$  le coefficient de proportionnalité.

Soit  $([t_0, t_1], \psi)$  le paramétrage temporel de la courbe  $C$  :

$$\begin{aligned} \psi : [t_0, t_1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto M(t) = (x(t), y(t)) = \psi(t) \end{aligned}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

Donc  $f'(t) = k \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)}$ . On note  $k$  le coefficient de proportionnalité.

Soit  $([t_0, t_1], \psi)$  le paramétrage temporel de la courbe  $C$  :

$$\begin{aligned} \psi : [t_0, t_1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto M(t) = (x(t), y(t)) = \psi(t) \end{aligned}$$

*$M(t)$  et  $\psi(t)$ , c'est la même chose !*

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

Après avoir effectué le tour de la courbe fermée  $C$ , la valeur affichée par les graduations du planimètre est

$$I = f(t_1) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f'(t)dt$$

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

Après avoir effectué le tour de la courbe fermée  $C$ , la valeur affichée par les graduations du planimètre est

$$\begin{aligned} I &= f(t_1) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f'(t) dt \\ &= k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(\psi(t))} \cdot \overrightarrow{\psi'(t)} dt \end{aligned}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

Après avoir effectué le tour de la courbe fermée  $C$ , la valeur affichée par les graduations du planimètre est

$$\begin{aligned} I &= f(t_1) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f'(t) dt \\ &= k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(\psi(t))} \cdot \overrightarrow{\psi'(t)} dt \\ I &= \mathcal{P}(K) = k \int_C \overrightarrow{v_\alpha} \cdot \overrightarrow{dM} \end{aligned}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

Après avoir effectué le tour de la courbe fermée  $C$ , la valeur affichée par les graduations du planimètre est

$$\begin{aligned} I &= f(t_1) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f'(t) dt \\ &= k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(\psi(t))} \cdot \overrightarrow{\psi'(t)} dt \\ I &= \mathcal{P}(K) = k \int_C \overrightarrow{v_\alpha} \cdot \overrightarrow{dM} \end{aligned}$$

On a retrouvé la même formule qu'avec l'approche physique.

# Fonctionnement du planimètre.

Approche Mathématique.

Après avoir effectué le tour de la courbe fermée  $C$ , la valeur affichée par les graduations du planimètre est

$$\begin{aligned} I &= f(t_1) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f'(t) dt \\ &= k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(\psi(t))} \cdot \overrightarrow{\psi'(t)} dt \\ I &= \mathcal{P}(K) = k \int_C \overrightarrow{v_\alpha} \cdot \overrightarrow{dM} \end{aligned}$$

On a retrouvé la même formule qu'avec l'approche physique.

*Il ne reste plus qu'à calculer  $\mathcal{P}(K) = k \int_C \overrightarrow{v_\alpha} \cdot \overrightarrow{dM}$*

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$$\text{Calcul de } \mathcal{P}(K) = k \int_C \vec{v}_\alpha \cdot \overrightarrow{dM}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$$\text{Calcul de } \mathcal{P}(K) = k \int_C \vec{v}_\alpha \cdot \overrightarrow{dM} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$$\text{Calcul de } \mathcal{P}(K) = k \int_C \vec{v}_\alpha \cdot \overrightarrow{dM} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt$$

On va utiliser les coordonnées polaires du point  $M = M(t)$ , qui sont  $(r, \theta) = (r(t), \theta(t))$ ;

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$$\text{Calcul de } \mathcal{P}(K) = k \int_C \vec{v}_\alpha \cdot \overrightarrow{dM} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt$$

On va utiliser les coordonnées polaires du point  $M = M(t)$ , qui sont  $(r, \theta) = (r(t), \theta(t))$ ;

$$\overrightarrow{OM(t)} = r(t) \vec{e}_r$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$$\text{Calcul de } \mathcal{P}(K) = k \int_C \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt$$

On va utiliser les coordonnées polaires du point  $M = M(t)$ , qui sont  $(r, \theta) = (r(t), \theta(t))$ ;

$$\overrightarrow{OM(t)} = r(t)\vec{e}_r \text{ et donc } \overrightarrow{M'(t)} = r'(t)\vec{e}_r + r(t)\frac{d}{dt}\vec{e}_r$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$$\text{Calcul de } \mathcal{P}(K) = k \int_C \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt$$

On va utiliser les coordonnées polaires du point  $M = M(t)$ , qui sont  $(r, \theta) = (r(t), \theta(t))$ ;

$$\overrightarrow{OM(t)} = r(t)\vec{e}_r \text{ et donc } \overrightarrow{M'(t)} = r'(t)\vec{e}_r + r(t)\frac{d}{dt}\vec{e}_r$$

On sait que  $\frac{d}{dt}\vec{e}_r = \theta'(t)\vec{e}_\theta$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$$\text{Calcul de } \mathcal{P}(K) = k \int_C \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M} = k \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}_\alpha(M(t)) \cdot M'(t) dt$$

On va utiliser les coordonnées polaires du point  $M = M(t)$ , qui sont  $(r, \theta) = (r(t), \theta(t))$ ;

$$\vec{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r \text{ et donc } M'(t) = r'(t)\vec{e}_r + r(t)\frac{d}{dt}\vec{e}_r$$

$$\text{On sait que } \frac{d}{dt}\vec{e}_r = \theta'(t)\vec{e}_\theta$$

(puisque  $e_r = \cos \theta(t) \vec{i} + \sin \theta(t) \vec{j}$ , on dérive...)

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$$\text{Calcul de } \mathcal{P}(K) = k \int_C \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt$$

On va utiliser les coordonnées polaires du point  $M = M(t)$ , qui sont  $(r, \theta) = (r(t), \theta(t))$ ;

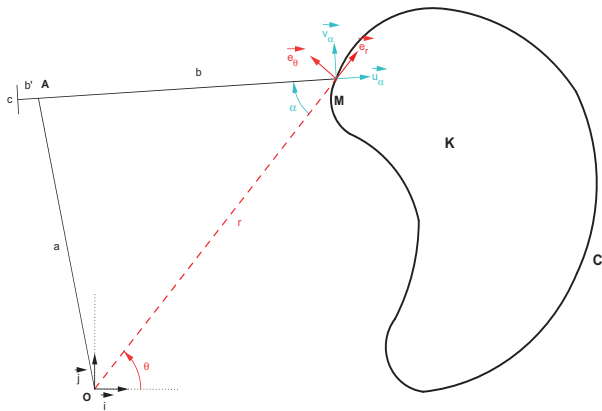
$$\overrightarrow{OM(t)} = r(t)\vec{e}_r \text{ et donc } \overrightarrow{M'(t)} = r'(t)\vec{e}_r + r(t)\frac{d}{dt}\vec{e}_r$$

On sait que  $\frac{d}{dt}\vec{e}_r = \theta'(t)\vec{e}_\theta$

$$\boxed{\overrightarrow{M'(t)} = r'(t)\vec{e}_r + r(t)\theta'(t)\vec{e}_\theta}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.



# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

Calcul de  $\overrightarrow{v_\alpha(M(t))} = \vec{v}_\alpha :$

# Fonctionnement du planimètre.

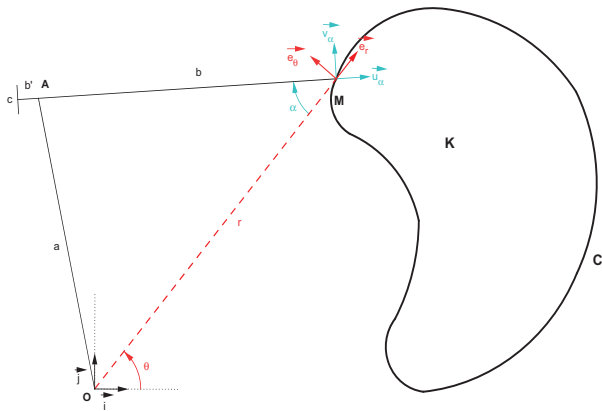
Calcul final.

Calcul de  $\overrightarrow{v_\alpha(M(t))} = \vec{v}_\alpha$  :

Dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , les coordonnées de  $\vec{u}_\alpha$  sont  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ , et les coordonnées de  $\vec{v}_\alpha$  sont  $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ .

# Fonctionnement du planimètre.

Figure fondamentale.



# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

Grâce à Al-Kashi appliqué au triangle  $OAM$ , on a :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2br}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

Grâce à Al-Kashi appliqué au triangle  $OAM$ , on a :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2br}$$

$$(OA^2 = OM^2 + AM^2 - 2 OM.AM \cos \alpha \text{ donc } a^2 = r^2 + b^2 - 2br \cos \alpha)$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

Grâce à Al-Kashi appliqué au triangle  $OAM$ , on a :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2br}$$

et

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2br} \right)^2} .$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

Grâce à Al-Kashi appliqué au triangle  $OAM$ , on a :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2br}$$

et

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2br} \right)^2} = g(r).$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$\vec{v}_\alpha(-\sin \alpha, \cos \alpha)$  et  $\overrightarrow{M'(t)}(r'(t), r(t)\theta'(t))$  dans la base orthonormale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$\vec{v}_\alpha(-\sin \alpha, \cos \alpha)$  et  $\overrightarrow{M'(t)}(r'(t), r(t)\theta'(t))$  dans la base orthonormale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

$$\text{avec } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2br} \\ \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + r^2 - a^2}{2br}\right)^2} = g(r). \end{cases}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$\vec{v}_\alpha(-\sin \alpha, \cos \alpha)$  et  $\overrightarrow{M'(t)}(r'(t), r(t)\theta'(t))$  dans la base orthonormale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

$$\overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} = -r'(t) \sin \alpha + r(t)\theta'(t) \cos \alpha$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$\vec{v}_\alpha(-\sin \alpha, \cos \alpha)$  et  $\overrightarrow{M'(t)}(r'(t), r(t)\theta'(t))$  dans la base orthonormale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

$$\text{avec } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2br} \\ \sin \alpha = g(r). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} &= -r'(t) \sin \alpha + r(t)\theta'(t) \cos \alpha \\ &= -g(r(t))r'(t) + r(t) \frac{b^2 + r(t)^2 - a^2}{2br(t)} \theta'(t) \end{aligned}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

Finalement,

$$\mathcal{P}(K) = k \int_C \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(K) &= k \int_C \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt \\ &= k \int_{t_0}^{t_1} \left[ g(r(t)) r'(t) + r(t) \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2br} \theta'(t) \right] dt\end{aligned}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(K) &= k \int_C \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt \\ &= k \int_{t_0}^{t_1} \left[ g(r(t)) r'(t) + r(t) \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2br} \theta'(t) \right] dt \\ &= k \int_{C_0} g(r) dr + \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2b} d\theta\end{aligned}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(K) &= k \int_C \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt \\ &= k \int_{t_0}^{t_1} \left[ g(r(t)) r'(t) + r(t) \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2br} \theta'(t) \right] dt \\ &= k \int_{C_0} g(r) dr + \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2b} d\theta \\ &= k \int_{C_0} (\omega + \omega')\end{aligned}$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(K) &= k \int_C \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt \\ &= k \int_{t_0}^{t_1} \left[ g(r(t)) r'(t) + r(t) \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2br} \theta'(t) \right] dt \\ &= k \int_{C_0} g(r) dr + \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2b} d\theta \\ &= k \int_{C_0} (\omega + \omega')\end{aligned}$$

$$\text{avec } \omega = \frac{r^2}{2b} \quad \text{et} \quad \omega' = g(r) dr + \frac{b^2 - a^2}{2b} d\theta.$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$$\mathcal{P}(K) = k \int_{C_0} (\omega + \omega')$$

$$\text{avec } \omega = \frac{r^2}{2b} \quad \text{et} \quad \omega' = g(r) dr + \frac{b^2 - a^2}{2b} d\theta.$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$$\mathcal{P}(K) = k \int_{C_0} (\omega + \omega')$$

$$\text{avec } \omega = \frac{r^2}{2b} \quad \text{et} \quad \omega' = g(r) dr + \frac{b^2 - a^2}{2b} d\theta.$$

$$\text{Comme } D\omega' = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b^2 - a^2}{2b} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (g(r)) = 0,$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$$\mathcal{P}(K) = k \int_{C_0} (\omega + \omega')$$

$$\text{avec } \omega = \frac{r^2}{2b} \quad \text{et} \quad \omega' = g(r) dr + \frac{b^2 - a^2}{2b} d\theta.$$

$$\text{Comme } D\omega' = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b^2 - a^2}{2b} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (g(r)) = 0,$$

On conclut

$$\mathcal{P}(K) = \frac{k}{b} \int_{C_0} \frac{r^2}{2} d\theta = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K).$$

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$$\mathcal{P}(K) = k \int_{C_0} (\omega + \omega')$$

$$\text{avec } \omega = \frac{r^2}{2b} \quad \text{et} \quad \omega' = g(r) dr + \frac{b^2 - a^2}{2b} d\theta.$$

$$\text{Comme } D\omega' = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b^2 - a^2}{2b} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (g(r)) = 0,$$

On conclut

$$\mathcal{P}(K) = \frac{k}{b} \int_{C_0} \frac{r^2}{2} d\theta = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K).$$

La grandeur  $\mathcal{P}(K)$  affichée par le planimètre est **proportionnelle à l'aire de  $K$ .**

# Fonctionnement du planimètre.

Calcul final.

$$\mathcal{P}(K) = k \int_{C_0} (\omega + \omega')$$

$$\text{avec } \omega = \frac{r^2}{2b} \quad \text{et} \quad \omega' = g(r) dr + \frac{b^2 - a^2}{2b} d\theta.$$

$$\text{Comme } D\omega' = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b^2 - a^2}{2b} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (g(r)) = 0,$$

On conclut

$$\mathcal{P}(K) = \frac{k}{b} \int_{C_0} \frac{r^2}{2} d\theta = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K).$$

La grandeur  $\mathcal{P}(K)$  affichée par le planimètre est **proportionnelle à l'aire de  $K$ .**

C.Q.F.D.