Le planimètre polaire

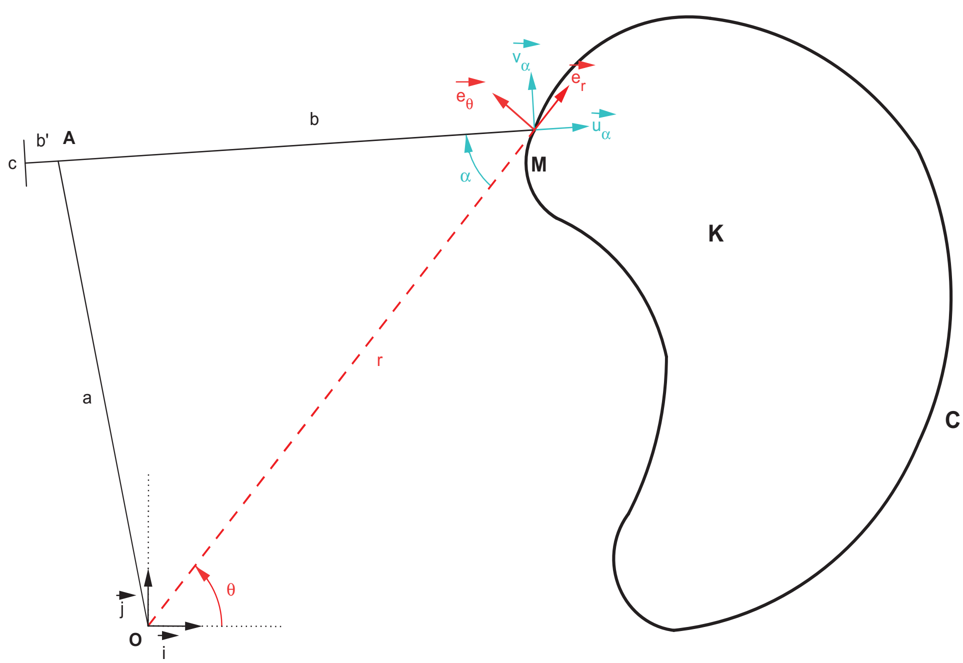
Document d'accompagnement des transparents.

Bruno Aebischer

Introduction

Dans mon exposé à La Rochelle, j'ai consacré une longue partie à rappeler et démontrer des propriétés « élémentaires » d'analyse : intégrale double, formes différentielles, intégrale curviligne, Green-Riemann.
La démonstration proprement dite du fonctionnement du planimètre s'est trouvée du coup un peu perdue à la fin de ces explications.
Je vais procéder différemment dans ce document, en ne rappelant plus les propriétés « à savoir », et en attaquant directement dans ce qui sert à la démonstration.

1 Figure



Le planimètre polaire et ses deux bras sont ici schématisés par les deux segments $[OA]$ et $[AM]$ de longueurs respectives a et b (et classiquement, en mettant l'origine du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ en O, le rayon $[OM]$ vaut r). La roulette d'enregistrement est le petit segment c.

On cherche l'aire de la figure K, dont le contour est la courbe fermée $\mathscr{C}$, paramétrée par $\begin{array}{rcl}[t_0, t_1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M(t)\end{array}$

On peut travailler en coordonnées polaires, ou en coordonnées cartésiennes, dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Le vecteur $\overrightarrow{u_\alpha}$ est le vecteur normal porté par le bras $[AM]$ ($\overrightarrow{u_\alpha} = \frac{1}{b}\overrightarrow{AM}$) et le vecteur $\overrightarrow{v_\alpha}$ est le vecteur normé directement orthogonal à $\overrightarrow{u_\alpha}$.
L'angle orienté α est $\alpha = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM})$.

2 Principe

On admet que la roulette ne peut tourner que perpendiculairement au deuxième bras $[AM]$ du planimètre. De ce fait, elle n'enregistre que le projeté orthogonal d'un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ sur le vecteur unitaire $\overrightarrow{v_\alpha}$. Au bout d'un tour, la valeur affichée par le planimètre correspond donc, à un coefficient de proportionnalité près, à la circulation du champ de vecteur $\overrightarrow{v_\alpha}$ le long du contour $\mathscr{C}$ de la figure K.
Si on veut raisonner plus « rigoureusement », on peut travailler avec les vitesses instantanées (ce qui revient à diviser le déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ par un instant élémentaire $\mathrm{d}t$!). On obtient la même formule au bout du compte, car $f(t_1) - f(t_0) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f'(t)\,\mathrm{d}t = k\int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))}\cdot\overrightarrow{M'(t)}\,\mathrm{d}t = k\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{v_\alpha}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M}$.

3 Calcul en polaires

3.1 Calcul du produit scalaire.

Soit $\mathscr{P}(K)$ la valeur affichée par le planimètre au bout d'un tour. On a donc

$$\mathscr{P}(K) = k\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{v_\alpha}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M} = k\int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))}\cdot\overrightarrow{M'(t)}\,\mathrm{d}t$$

Or les coordonnées de v_α dans la base orthonormale $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ associée aux coordonnées polaires, pour le point M sont $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ (celles de u_α sont $(\cos\alpha, \sin\alpha)$).
Comme d'autre part, dans cette base, les coordonnées de $\overrightarrow{M'(t)}$ sont $(r'(t), r(t)\theta'(t))$, on a donc
$\overrightarrow{v_\alpha(M(t))}\cdot\overrightarrow{M'(t)} = -r'(t)\sin(\alpha(t)) + r(t)\cos\alpha(t)\theta'(t)$.

3.2 Calcul de l'angle α.

Grâce à Al-Kashi, on a $\cos\alpha = \dfrac{r^2+b^2-a^2}{2br}$, donc $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\left(\dfrac{r^2+b^2-a^2}{2br}\right)^2} = g(r)$ ($\sin\alpha$, comme $\cos\alpha$ d'ailleurs, ne dépendent que de r et pas de θ.)

3.3 Calcul final.

Donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}(K) &= k\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{v_\alpha}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M} = k\int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))}\cdot\overrightarrow{M'(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= k\int_{t_0}^{t_1}\left(-g(r(t))r'(t) + r(t)\,\frac{r(t)^2+b^2-a^2}{2br(t)}\,\theta'(t)\right)\mathrm{d}t \\
\mathscr{P}(K) &= k\int_{\mathscr{C}} g(r)\,\mathrm{d}r + \frac{r^2+b^2-a^2}{2b}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

La forme différentielle $\omega'' = g(r)\,\mathrm{d}r + \dfrac{r^2+b^2-a^2}{2b}\,\mathrm{d}\theta$ peut s'écrire $\omega'' = \omega + \omega'$, avec $\omega' = g(r)\,\mathrm{d}r + \dfrac{b^2-a^2}{2b}\,\mathrm{d}\theta$ et $\omega = \dfrac{r^2}{2b}\,\mathrm{d}\theta$; la forme différentielle ω' est exacte, puisque $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{b^2-a^2}{2b}\right) - \dfrac{\partial}{\partial\theta}(g(r)) = 0$, donc

$$\mathscr{P}(K) = k\int_{\mathscr{C}} \frac{r^2}{2b}\,\mathrm{d}\theta = \frac{k}{b}\,\mathscr{A}(K).$$

La valeur affichée par le planimètre est bien proportionnelle à l'aire de K.

4 Calcul en coordonnées cartésiennes.

Sur la suggestion de Frédérique Plantevin, voici une démonstration de ce résultat n'utilisant pas les coordonnées polaires.
On a toujours l'expression de la valeur affichée par le planimètre comme circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{v_\alpha}$: $\mathscr{P}(K) = \displaystyle\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{v_\alpha} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$.
Mais on sait que $\overrightarrow{u_\alpha} = \dfrac{1}{b}\overrightarrow{AM}$; les coordonnées de $\overrightarrow{u_\alpha}$ sont donc $\left(\dfrac{x - x_A}{b}, \dfrac{y - y_A}{b}\right)$ et celles de $\overrightarrow{v_\alpha}$ sont donc $\left(-\dfrac{y - y_A}{b}, \dfrac{x - x_A}{b}\right)$.
Par définition de la circulation d'un champ de vecteurs, et en appliquant Green-Riemann, on a donc

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\mathscr{K}) &= \frac{k}{b}\int_{\mathscr{C}} -(y - y_A)\,\mathrm{d}x + (x - x_A)\,\mathrm{d}y = \frac{k}{b}\iint_K \left(\frac{\partial(x - x_A)}{\partial x} + \frac{\partial(y - y_A)}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{k}{b}\iint_K \left(2 - \frac{\partial x_A}{\partial x} - \frac{\partial y_A}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Or on peut, sans calculer les coordonnées du point A, trouver la valeur de $\dfrac{\partial x_A}{\partial x} + \dfrac{\partial y_A}{\partial y}$, en utilisant le fait que les segments $[OA]$ et $[AM]$, même s'ils dépendent de x et de y, ont des longueurs a et b fixes.

Puisque $x_A^2 + y_A^2 = a^2$, on a $\begin{cases} x_A\dfrac{\partial x_A}{\partial x} + y_A\dfrac{\partial y_A}{\partial x} = 0 & (1) \\ x_A\dfrac{\partial x_A}{\partial y} + y_A\dfrac{\partial y_A}{\partial y} = 0 & (2)\end{cases}$

De même, puisque $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = b^2$, on a $\begin{cases} (x - x_A)\dfrac{\partial(x - x_A)}{\partial x} + (y - y_A)\dfrac{\partial(y - y_A)}{\partial x} = 0 \\ (x - x_A)\dfrac{\partial(x - x_A)}{\partial y} + (y - y_A)\dfrac{\partial(y - y_A)}{\partial y} = 0\end{cases}$

Ce dernier système équivaut à $\begin{cases} (x - x_A)\left(1 - \dfrac{\partial x_A}{\partial x}\right) - (y - y_A)\dfrac{\partial y_A}{\partial x} = 0 \\ -(x - x_A)\dfrac{\partial x_A}{\partial y} + (y - y_A)\left(1 - \dfrac{\partial y_A}{\partial y}\right) = 0\end{cases}$

Ou encore $\begin{cases} (x - x_A)\dfrac{\partial x_A}{\partial x} + (y - y_A)\dfrac{\partial y_A}{\partial x} = x - x_A & (3) \\ (x - x_A)\dfrac{\partial x_A}{\partial y} + (y - y_A)\dfrac{\partial y_A}{\partial y} = y - y_A & (4)\end{cases}$

Prenons les équations (1) et (3), nous obtenons le système : $\begin{cases} x_A\dfrac{\partial x_A}{\partial x} + y_A\dfrac{\partial y_A}{\partial x} = 0 & (1) \\ (x - x_A)\dfrac{\partial x_A}{\partial x} + (y - y_A)\dfrac{\partial y_A}{\partial x} = x - x_A & (3)\end{cases}$;

c'est un système de Cramer, on obtient facilement la valeur $\dfrac{\partial x_A}{\partial x} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_A \\ x - x_A & y - y_A\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x - x_A & y - y_A\end{vmatrix}} = \dfrac{x_A y_A - x y_A}{x_A y - x y_A}$

De même, avec les équations (2) et (4), on obtient le système $\begin{cases} x_A\dfrac{\partial x_A}{\partial y} + y_A\dfrac{\partial y_A}{\partial y} = 0 & (2) \\ (x - x_A)\dfrac{\partial x_A}{\partial y} + (y - y_A)\dfrac{\partial y_A}{\partial y} = y - y_A & (4)\end{cases}$

et $\dfrac{\partial y_A}{\partial y} = \dfrac{\begin{vmatrix} x_A & 0 \\ x - x_A & y - y_A\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x - x_A & y - y_A\end{vmatrix}} = \dfrac{x_A y - x_A y_A}{x_A y - x y_A}$.

Finalement $\dfrac{\partial x_A}{\partial x} + \dfrac{\partial y_A}{\partial y} = 1$, et donc $\mathscr{P}(K) = \dfrac{k}{b}\displaystyle\iint_K (2 - 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{k}{b}\mathscr{A}(K)$.