L'Apollonius Gallus de François Viète ou le problème des trois cercles : une référence, un défi pour la construction de nouvelles méthodes en géométrie

Anne Boyé - IREM des pays de la Loire - Centre François Viète - Nantes

François Viète (1540 - 1603)

- L’Apollonius Français de François Viète ou la résurrection de la géométrie sur les contacts d’Apollonius de Perga dédié à l’éminent belge Adrien Romain. (1600)
- Introduction en l’Art analytique (1591).

- “ Viète n’était pas moins profond dans la géométrie pure des Anciens que dans l’Analyse algébrique. On lui doit le traité d’Apollonius *De tactionibus,* qu’il a restitué sous le titre *d’Apollonius Gallus.* C’est là qu’il résolut, le premier, le problème du cercle tangent à trois cercles donnés dans un plan, qui occupait alors les géomètres, et leur présentait des difficultés ”.
- Nous nous proposons d’illustrer cet extrait de *l’Aperçu historique des méthodes en géométrie* de Michel Chasles, d’éclairer ce que pouvait être “ la géométrie pure ” à l’époque de François Viète, et d’expliquer comment ce petit traité de l’Apollonius Gallus a pu être, en quelque sorte, une référence pour l’histoire de la géométrie des siècles qui suivirent.

Aperçu biographique

- *"François Viète natif de Fontenai en Poitou, fut un homme d'un grand génie et d'une si profonde méditation, qu'il découvrit les plus secrets mystères des Sciences les plus abstruses, et qu'il vint à bout sans peine de tout ce qu'un homme subtil est capable de concevoir et d'exécuter. Mais parmi ses diverses occupations, et les embarras des affaires dont son vaste et infatigable esprit ne fut jamais exempt, il exerça surtout son industrie aux mathématiques, et il y excella d'une telle manière, que tout ce qui a été inventé par les anciens dans cette science, et dont nous sommes privés par l'injure du temps qui a aboli leurs écrits, il l'a inventé lui-même de nouveau, il en a renouvelé l'usage, et a même ajouté beaucoup de choses à leurs merveilleuses découvertes. Il méditait avec tant d'application qu'on l'a vu souvent demeurer trois jours entiers dans son cabinet sans manger, et même sans dormir qu'autant qu'il le pouvait faire en appuyant de temps en temps sa tête sur sa main, pour réparer ses forces par quelques moments de sommeil."*
- De Thou (1553-1617), Eloge de Viète

- Naissance en 1540 à Fontenay-le-Comte, capitale du Bas Poitou.
- Etudes probablement dans le cloître franciscain de Fontenay (où Rabelais avait vécu et étudié 50 ans avant)
- Université de Poitiers ; 1559, licencié en droit.

1560-1570 : occupe le siège d'avocat du roi au Tribunal de Fontenay-le-Comte.

1564-1570

Au service de la famille de Soubise, et précepteur de Catherine de Parthenay.

- Restera lié à cette famille et ses amis protestants, en cette période de douloureux et violents conflits religieux.
- Son élève, Catherine de Parthenay le pousse à ses premiers travaux scientifiques, car elle est intéressée par les questions d'astronomie.
- Compose son Canon mathématique

1571-1573 : avocat au Parlement de Paris.

- Commence à faire imprimer son Canon mathématique qui est édité à Paris en 1579.

- Présent lors de la nuit de la Saint-Barthélémy, durant laquelle fut tué le mari de Catherine de Parthenay, elle-même échappant de peu au massacre.

1574-1580 : conseiller au Parlement de Bretagne (Rennes).

1580 : nommé, par Henri III, Maître des Requêtes ordinaire de l'Hôtel du Roi (charge à vie).

1584-1589 : suspendu de ses fonctions par Henri III, sous la pression des Guise et des Nemours, chefs catholiques de la Sainte Ligue, il s'installe en Poitou et se consacre à ses travaux mathématiques. Il y rédige notamment son œuvre majeure l'Art analytique.

1589-1593 : reprend, après la mort de Henri III et grâce à l'avènement de Henri IV, ses fonctions de Maitre des Requêtes et de conseiller auprès du roi et de la Cour installés provisoirement à Tours.

- Travaux de cryptographie : déchiffre les messages ennemis, en particulier ceux des Espagnols.
- Edition, à Tours, entre 1591 et 1593, de plusieurs opuscules de son Art analytique, et en 1593 d'un livre donnant des réponses à diverses questions mathématiques.

1594 : revient à Paris avec Henri IV, et est nommé conseiller du roi en son conseil privé.

- \- 10 octobre 1594 : relève le défi de résoudre un problème proposé à "tous les mathématiciens du monde entier" par le mathématicien belge Adrien Romain, et fait éditer sa réponse en 1595.

1595 : reçoit, à Fontenay, la visite d'Adrien Romain durant 5 à 6 semaines, pendant lesquelles les deux hommes font des mathématiques. Adrien Romain repart en Allemagne avec un problème à résoudre. Viète publiera sa propre solution en 1600 sous le titre : Apollonius Gallus.

1600 : il publie, sous forme de livre, un rapport sur le vrai calendrier grégorien, qui est condamné par Rome, ce qui l'entraîne dans une polémique avec Clavius, jésuite et mathématicien du Collège romain, chargé par le Pape, en 1582, de la réforme du calendrier.

- Séjourne à Tours en décembre 1601.

- - 14 décembre 1602 : obtient du roi, pour raison de santé, la résiliation de ses tâches.

- - 23 février 1603 : meurt à Paris.

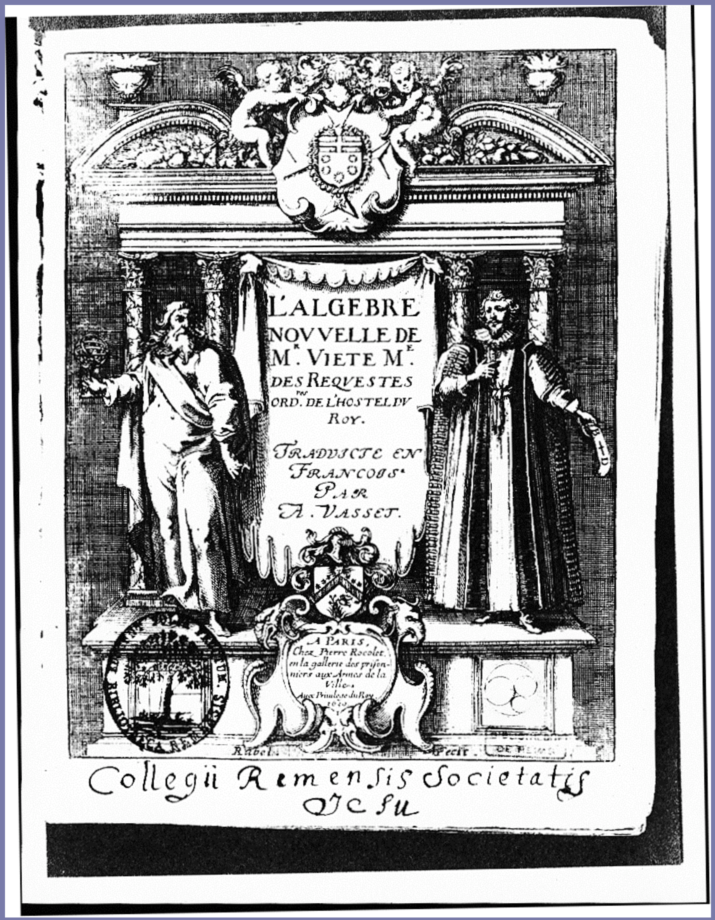
L'Apollonius Gallus : un des grands textes de l'histoire des mathématiques

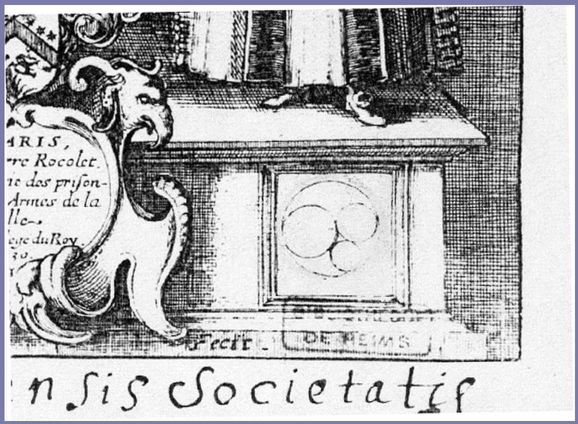
- *Le célèbre Adrianus Romanus le résolvait par l'emploi de deux hyperboles ; ce qui était une faute contre les règles d'une bonne méthode, puisque la ligne droite seule devait suffire : aussi a t-elle été relevée par Viète. Les plus grands géomètres ont continué, depuis, de s'occuper de ce problème, et en ont donné différentes solutions, parmi lesquelles on distingue celles de Descartes, de Newton, de TH. Simpson, de Lambert, d'Euler, de Fuss. (Chasles)*

- Texte qui a une histoire, presque entourée du halot de la légende.

Géométrie pure comme le présente Chasles ?

- Introduction en l’Art analytique
- Effections géométriques
- Supplément géométrique
    - interprétation des opérations algébriques fondamentales en termes de géométrie.





Page de couverture de *L'Algèbre nouvelle de M. Viète*, traduite par en 1630.

La genèse de l'Apollonius Gallus

Ou

- *L'histoire et les circonstances de la construction par Viète d'un cercle tangent à trois cercles donnés.*

Tallemant des Réaux, dans

« Mémoires pour servir à l'histoire du XVII° siècle »

(historiette 46, 1861).

Monsieur Viète était un maître des requêtes, natif de Fontenay-le-Comte, en Bas-Poitou. Jamais homme ne fut plus né aux mathématiques; il les apprit tout seul.

Du temps d'Henri IV, un hollandais, nommé Adrianus Romanus, savant aux mathématiques, mais non pas tant qu'il croyait, fit un livre où il mit une proposition qu'il donnait à résoudre à tous les mathématiciens de l'Europe; or en un endroit de son livre il nommait tous les mathématiciens de l'Europe, et n'en donnait pas un à la France. Il arriva peu de temps après qu'un ambassadeur des États vint trouver le Roi à Fontainebleau. Le Roi prit plaisir à lui en montrer toutes les curiosités, et lui disait les plus excellents qu'il y avait en chaque profession de son royaume. Mais, Sire, lui dit l'ambassadeur, vous n'avez pas de mathématicien, car Adrianus Romanus n'en nomme pas un de français dans le catalogue qu'il a fait. "Si fait, si fait, dit le roi, j'ai un excellent homme : qu'on m'aille quérir Monsieur Viète."

- *On montre la proposition à Monsieur Viète, qui se met à une des fenêtres de la galerie où ils étaient alors, et avant que le Roi en sortit, écrivit deux solutions avec du crayon. Le soir il en envoya plusieurs à cet ambassadeur, et ajouta qu'il lui en donnerait tant qu'il lui plairait, car c'était un problème dont les solutions sont infinies.*
- *L'ambassadeur envoie ces solutions à Adrianus Romanus, qui, sur l'heure, se prépare pour venir voir Monsieur Viète. Arrivé à Paris, il trouva que Monsieur Viète était allé à Fontenay ; le bon hollandais va à Fontenay. A Fontenay, on lui dit que Monsieur Viète est à sa maison des champs. Il l'attend quelques jours, et retourne le redemander ; on lui dit qu'il était en ville; Il fait comme Apelles, qui tira une ligne. Il laisse une proposition ; Viète résout cette proposition ; Le hollandais revient ; on la lui donne, le voilà bien étonné ; il prend son parti d'attendre jusqu'à l'heure du dîner. Le maître des requêtes revient ;*

- *le hollandais lui embrasse les genoux; Monsieur Viète tout honteux le relève, lui fait un million d'amitiés; ils dînent ensemble, et après il le mène dans son cabinet; Adrianus fut six semaines sans le pouvoir quitter. Un autre étranger, nommé Galtade, gentilhomme de Raguse, se fit faire résident de sa république en France pour conférer avec Monsieur Viète. Monsieur Viète mourut jeune, car il se tua à force d'étudier.*

Le problème posé par Adrien Romain (Adriaen van Roomen(1561-1615)

- Posé en 1590.(Les écrits de Viète commencent tout juste à paraître.)
- Visite de l'ambassadeur : 1594
- Il s'agit de résoudre une équation de degré 45 que nous écririons en écriture contemporaine :

$$
\begin{aligned}
&45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + 7811375x^9 - 34512075x^{11} + 1050306075x^{13} \\
&-232676280x^{15} + 384942375x^{17} - 488494125x^{19} + 483841800x^{21} \\
&-378658800x^{23} + 236030652x^{25} - 117679100x^{27} + 46955700x^{29} - 14945040x^{31} \\
&+3764565x^{33} - 740459x^{35} + 111150x^{37} - 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = N
\end{aligned}
$$

FRANCISCI VIETÆ

AD

PROBLEMA, QVOD OMNIBVS MATHEMATICIS TOTIVS ORBIS CONSTRUENDUM PROPOSUIT ADRIANUS ROMANUS,

RESPONSVM.

SI toto terrarum orbe non errat ADRIANVS ROMANVS, dum Mathematicos totius terrarum orbis unius sui Problematis solutioni vix censet idoneos, non ille saltem Gallias, nec Galliarum Lycia suo dimensus est radio. Cedat ROMANO Belga, cedat ROMANVS Belgæ, vix sinet Gallus à ROMANO vel Belga gloriam suam sibi præripi. Ego qui me Mathematicum non profiteor, sed quem, si quando vacat, delectant Mathematices studia, Problema ADRIANICVM ut legi ut solvi, nec me malus abstulit error. Sic trihorio ingens prodii Geometra. Neque verò placet barbarum idioma, id est, Algebricum. Geometrica Geometrice tracto, Analytica Analytice. Curabo tamen ut me, sive quasi Geometram sive novum Analystam, vulgus Algebristarum satis exaudiat.

CAPVT I.

Proponentis Adriani Romani verba.

PRimum igitur Adriani Romani proponentis ipsa verba refero, ne immutato quidem commate.

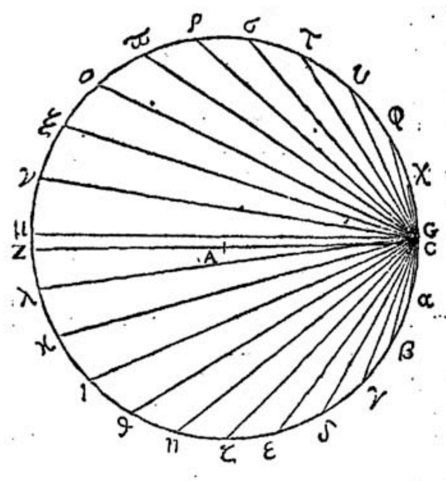
PROBLEMA MATHEMATICVM OMNIBVS ORBIS MATHEMATICIS AD CONSTRVENDVM PROPOSITVM.

Si duorum terminorum prioris ad posteriorem proportio sit, ut 1 (1) ad 45 (1) − 3795 (3) + 9,5634 (5) − 113,8500 (7) + 781,1375 (9) − 3451,2075 (11) + 1,0530,6075 (13) − 2,3267,6280 (15) + 3,8494,2375 (17) − 4,8849,4125 (19) + 4,8384,1800 (21) − 3,7865,8800 (23) + 2,3603,0652 (25) − 1,1767,9100 (27) + 4695,5700 (29) − 1494,5040 (31) + 376,4565 (33) − 74,0459 (35) + 11,1150 (37) − 1,2300 (39) + 945 (41) − 45 (43) + 1 (45) deturque terminus posterior, invenire priorem.

Datum quadrato-cubum adfectum; adjunctione quidem plano-solidi sub latere & dato coëfficiente plano-plano; multa vero plano-solidi sub cubo & dato coëfficiente plano, resolvere.

Hæc autem in opere restitutæ Analyseos Mathematicæ abunde tractata & exposita sunt. Quare quærenti Adriano licet sive in Geometricis sive in Arithmeticis satisfacere. Adscito nempe eo, quod ad supplementum Geometriæ inducendum fuit, postulato dabitur in exposito diagrammate circumferentia CF. Et eodem opere ἐναλλὰξ duplicato dabitur circumferentia GC, atque adeo recta quæ ei subtenditur. In numeris, qualium semidiameter AC 1. talium recta CG quæsita fit $\frac{930,839}{100,000,000}$.

Dato autem termino authenta, seu classico, dantur reliqui viginti duo plagii, Undecim si placet, ad alam sinistram classici. Undecim ad dextram utpote hac methodo. Quoniam in circulo cujus diameter ZAC data circumferentia CD imperata est secari quadragequintufariam, Quod opus duplici continua trisectione, ac una demum quintusectione est absolutum, Itaque data est CG quadragesima quinta pars datæ CD. Producatur GC in α posita Gα æquali quadragesimæ quintæ parti circumferentiæ totius circuli. Supersunt igitur in circumferentia tota quadraginta quatuor quadragesimæ quintæ. Itaque à puncto α progrediendo εἰς ἑπόμενα ad punctum G sumantur circumferentiæ viginti duo æquales, quarum ideo unaquæque sit duabus quadragesimis quintis æqualis. Et sunto αβ, βγ, γδ, δε, εζ, ζη, ηϑ, ϑι, ικ, κλ, λμ, μν, νξ, ξο, οπ, πρ, ρσ, στ, τυ, υφ, φχ, χG. Et puncta quidem undecim α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ, ι, κ, λ consistent in unius semicirculi circumferentia. Reliqua vero μ, ν, ξ, ο, π, ρ, σ, τ, υ, φ, χ in circumferentia semicirculi reliqui. Subtendantur in priore semi-circulo Cα, Cβ, Cγ, Cδ, Cε, Cζ, Cη, Cϑ, Cι, Cκ, Cλ. Æque subtendantur in posteriore Cχ, Cφ, Cυ, Cτ, Cσ, Cρ, Cπ, Cο, Cξ, Cν, Cμ. Dico subtensas illas esse binos undenos, de quibus monui, terminos.



Id est, dico de iis singulis propositum à Romano quadragequintusectionis Problema, quod tam varium & ambiguum non sensisse arguunt ea, quæ tanquam soluta protulit, exempla, posse in ea de qua specialiter quærit hypothesi, non aliter quam de primum exhibita CG, explicari.

- Viète a rapidement reconnu que l’équation est satisfaite par la corde d’un cercle de rayon 1, sous tendant un arc de 8° (=360/45).
- C’est la solution qu’avait d’ailleurs proposée Adrien Romain.
- Le lendemain Viète avait trouvé les 22 autres solutions positives.

- (Nous savons qu’il en existe autant de négatives)

- En 1595, Viète publie sa réponse sous le titre *: Ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, responsum.* Le ton du défi marque l'introduction. Viète alors n'a pas encore rencontré Adrien Romain, avec qui, nous l'avons vu, il se liera d'amitié. Cette introduction met aussi en lumière certains principes affirmés dans l'*Isagoge*

- *S'il ne s'est pas perdu dans le monde entier à dénombrer péniblement les mathématiciens du monde entier capables de résoudre son unique problème, Adrien Romain n'a pas arpenté les Gaules et même les Lycia des Gaules comme il faut.*
- *Que le Belge le cède au Romain, que le Romain le cède au Belge, en tout cas un Français tolérera à grand peine qu'un Romain ou un belge lui dérobe sa gloire.*
- *Moi qui ne me proclame pas mathématicien, mais que les travaux mathématiques passionnent lorsque j'en ai le loisir, dès que j'ai lu le problème d'Adrien, je l'ai résolu sans qu'aucune erreur malheureuse ne m'égare.*
- *Ainsi en trois heures je me suis révélé grand géomètre, d'autant plus qu'aucune expression étrangère, c'est-à-dire algébrique, ne m'a convenu car la géométrie se traite en géomètre et l'analytique en analyste.*

- A la fin de sa réponse, Viète lance un défi à Adrien Romain : résoudre le dernier problème du traité perdu d’Apollonius sur les contacts, à savoir décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.

Pour exercer l'intelligence des esprits studieux et non pour la mettre à la torture, je leur propose de construire le problème ci-dessous.

Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.

Apollonius l'a proposé dans son livre Des Contacts qui a péri sous les caprices du temps.

Si la Belgique ne met pas en avant ses Apollonius, la France produira le sien.

Je ne doute pas que les algébristes ne le résolvent en l'énonçant sous une autre forme :

> *Etant donnés les demi-diamètres de trois cercles quelconques et les distances de leurs centres, donner le demi-diamètre d'un quatrième cercle qui leur sera tangent et la distance de son centre aux trois autres centres des cercles donnés.*

Regiomontanus qui a résolu le problème par l'algèbre, déclare qu'il ne peut être construit par la géométrie.

Ne serait-ce pas parce que jusqu'à ce jour, l'algèbre n'a été traitée que d'une manière corrompue ?

Acceptez ma nouvelle algèbre, vous qui aimez les sciences et sur ce, Salut et Prospérité.

- *Regiomontanus ?*
- Algèbre de Viète différente .
- Problème du second degré donc « problème plan » qui peut se construire à la règle et au compas.

- *Réponse d'Adrien Romain :*
- 1596 : *Problema Apolloniacum quo datis tribus circulis*.
- Détermine le centre du cercle tangent comme point d'intersection de deux hyperboles.
- Le recours aux coniques ne peut être accepté dans un « problème plan », et dans l'esprit de Viète est non conforme aux méthodes des anciens.

- 1597 : solution de Viète par une lettre manuscrite. Publiée en 1600.

FRANCISCI VIETÆ

APOLLONIVS GALLVS.

Seu,

EXSUSCITATA APOLLONII PERGÆI

ΠΕΡῚ ΕΠΑΦΩ͂Ν GEOMETRIA.

Ad V. C.

ADRIANUM ROMANUM Belgam.

PROBLEMA Apollonii de deſcribendo circulo, quem tres dati contingant (clariſſime Adriane) Geometrica ratione conſtruendum propoſui φιλομαθῶν, non Mechanica. Dum itaque circulum per hyperbolas tangis, rem acu non tangis. Neque enim hyperbolæ deſcribuntur in Geometricis καθ' ἐπιστημονικὸν λόγον. Duplicavit cubum per parabolas Menechmus, per conchoidas Nicomedes, an igitur duplicatus eſt Geometrice cubus? Quadravit circulum per volutam inordinatam Dinoſtratus, per ordinatam Archimedes, an igitur Geometrice quadratus eſt circulus? Id vero nemo pronunciabit Geometra. Reclamaret Euclides, & tota Euclideorum ſchola. Ergo clariſſime Adriane, ac ſi placet Apolloni Belga, quoniam Problema quod propoſui planum eſt, tu vero ceu ſolidum explicaſti, neque ideo occurſum hyperbolarum, quem ad factionem tuam adſumis, firmaſti, neque etiamnum potes firmare, quoniam revera ſi aſymptoti fuerint parallelæ, erit irritus labor, & alioqui conicas ſectiones in plano deſcribere ſemper veriti ſunt antiqui, miſſas fac lineas mixtas, & jam ab Apollonio ad ripas Oceani Aquitanici exſuſcitato ultro accipe τεχνικὴν καὶ ἐπιστημονικὴν χειρουργίαν.

Apollonii Pergæi Problemata περὶ ἐπαφῶν ad decem contraxit Pappus Alexandrinus, quæ ideo ſingula perſequar eo, qui convenientior videbitur, ordine.

PROBLEMA I.

DAtis tribus punctis per eadem circulum deſcribere: oportet autem data puncta non exiſtere tria in eadem linea recta.

Les origines du problème

- Le problème de décrire un cercle tangent à trois cercles donnés a été présenté par Pappus dans le livre VII de sa *Collection*, comme étant le dixième du Traité des contacts, un des ouvrages perdus d'Apollonius. L'objet de ce traité, représentatif, selon Pappus, de l'Analyse des Anciens, était ainsi caractérisé : étant donnés trois éléments quelconques parmi des points, des droites et des cercles, décrire un cercle qui passe par les points donnés, ou qui soit tangent aux droites et aux cercles donnés. Dans le dernier problème, le plus difficile, il fallait décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.

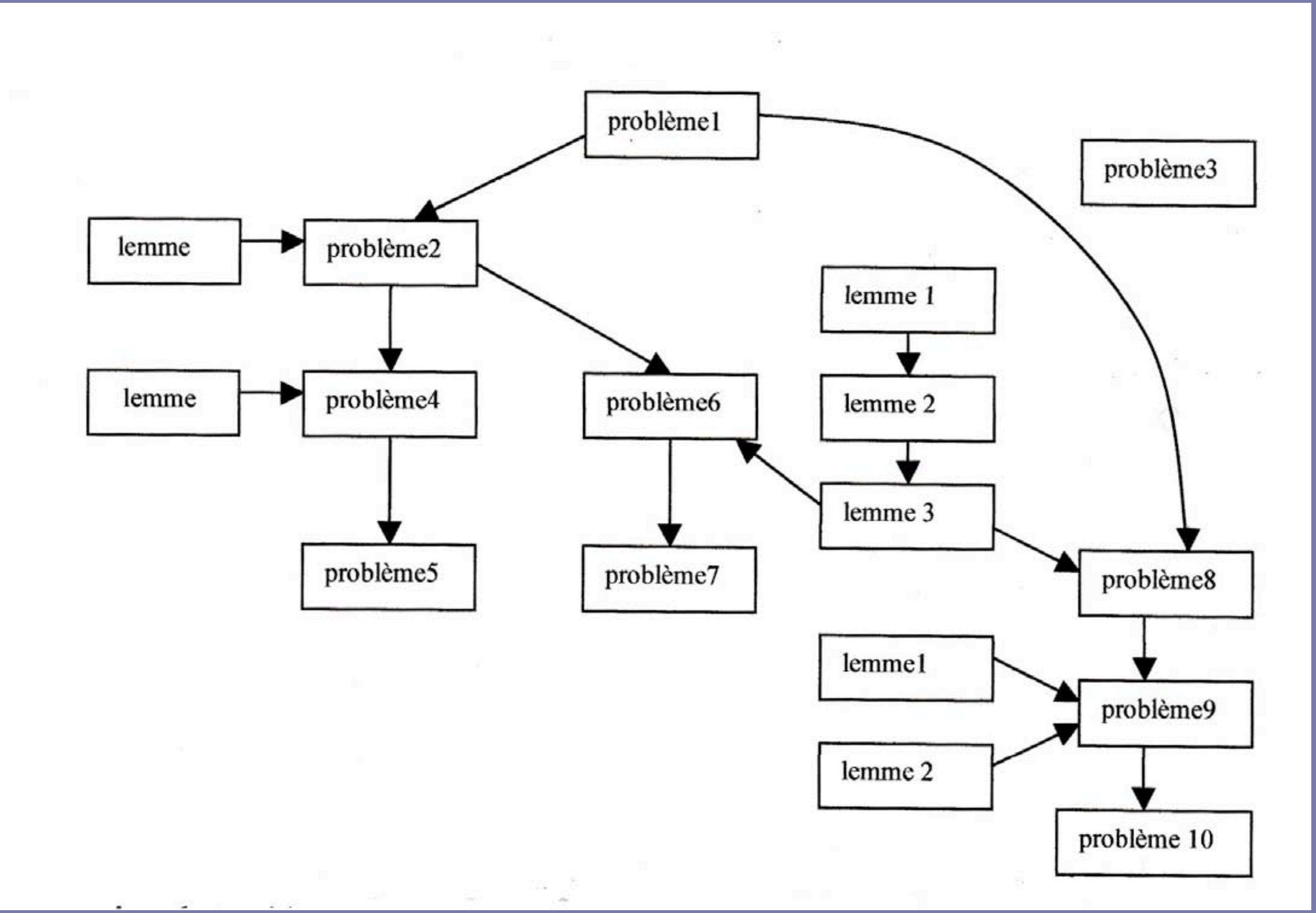
- Pour résoudre ce dernier problème, Viète va reprendre les neufs problèmes d’Apollonius précédents, dans la lignée du Livre des contacts.
- Son Apollonius Gallus sera suivi de deux petits appendices : « Au sujet des problèmes dont Regiomontanus dit ne pas connaître la construction géométrique, et ainsi les résout malheureusement. »
- Très appréciés des astronomes, par exemple Kepler.

Structure de l'Apollonius Gallus

- Pappus indiquait que le traité perdu était divisé en deux livres, qui contenaient 21 lemmes, 60 théorèmes et onze problèmes.
- D'après la proposition, qui résumait tous les problèmes, dix cas se présentaient selon qu'étaient donnés trois points, ou trois droites, ou deux points et une droite, ou deux droites et un point, ou deux points et un cercle, ou deux cercles et un point, ou deux droites et un cercle, ou deux cercles et une droite, ou un point, une droite un cercle, ou bien trois cercles.

Problème 1	$P_1P_2P_3$
Problème 2	$P_1P_2D_1$
Problème 3	$D_1D_2D_3$
Problème 4	$D_1D_2P_1$
Problème 5	$D_1D_2C_1$
Problème 6	$P_1D_1C_1$
Problème 7	$D_1C_1C_2$
Problème 8	$P_1P_2C_1$
Problème 9	$P_1C_1C_2$
Problème 10	$C_1C_2C_3$

Ordre de résolution choisi par Viète :



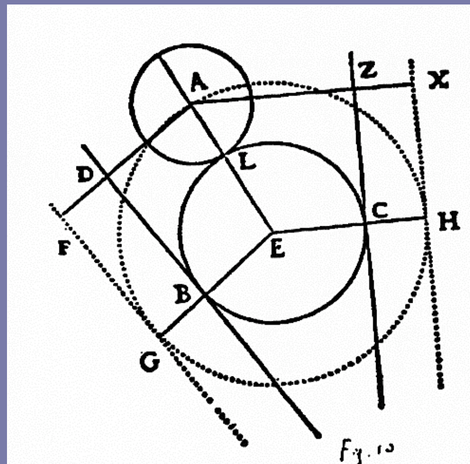
- Forme du texte euclidienne.
- Seule la démonstration synthétique est donnée, en accord avec ce qu'il a écrit au chapitre VII de l'Isagoge :
- *C'est pourquoi le géomètre habile, fut-il expert en analytique, le dissimule. Et comme s'il réfléchissait à la résolution à effectuer, il présente son problème sous forme synthétique et le développe.*

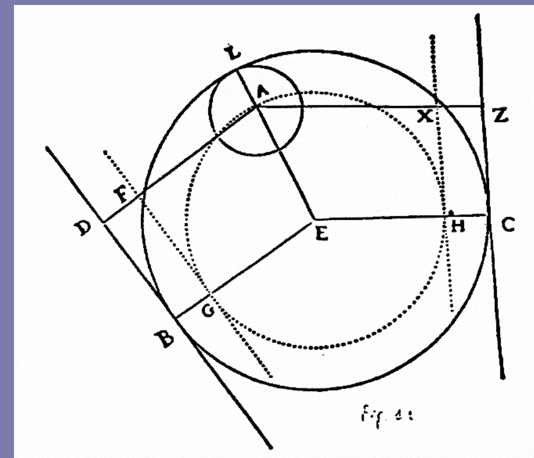
Le dixième problème

- Résolution qui fera l'admiration de ses contemporains, et dénommée « méthode de Viète » par les successeurs, jusqu'à nos jours.
- Repose sur le recours à des « éléments auxiliaires » qui peuvent être des cercles ou des droites. Répertoriée au XIX° siècle comme la « méthode des translations parallèles ».

Apparaît dans le problème 5

- On se donne un cercle et deux droites. Il faut décrire un cercle tangent au cercle donné et tangent aux deux droites données





- *Problème 5 : D1, D2, C1*
- Le cercle a pour centre A . Du point A, on abaisse les perpendiculaires aux deux droites, respectivement en D et Z. Sur chaque droite, on prend des longueurs égales au rayon du cercle donné, en les ajoutant (premier cas), ou en les retranchant (deuxième cas). On obtient deux points, F et X. Par ces points, on trace les parallèles aux deux droites données.
- Le problème 4 permet de tracer un cercle passant par A et tangent aux deux droites auxiliaires. Ce cercle a pour centre E. E est aussi le centre d'un cercle tangent aux deux droites données et au cercle de centre A donné. Il suffit pour cela d'augmenter ou de diminuer le rayon du cercle auxiliaire tracé du rayon du cercle de centre A donné.
- Dans un cas, le cercle obtenu est tangent intérieurement au cercle donné, dans l'autre intérieurement.

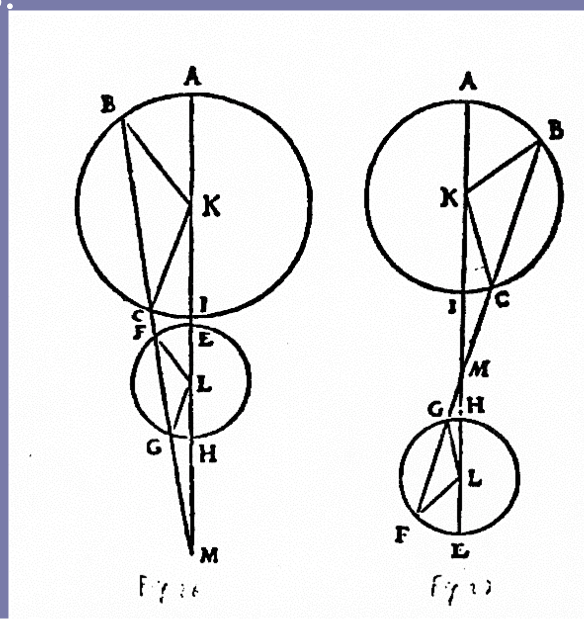
- On se ramène à un problème précédemment traité, puis on déplace les droites ou les cercles auxiliaires « parallèlement » à eux mêmes jusqu’à ce qu’ils occupent la situation voulue dans le nouveau problème.

Enchaînement problème 9-problème 10.

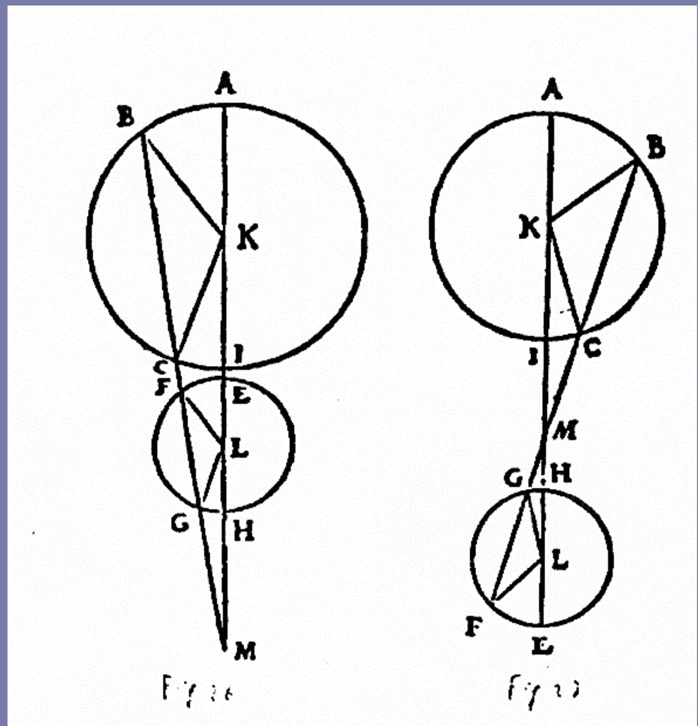
- Viète se place dans le cas où les trois cercles donnés ont des rayons deux à deux distincts et des centres non alignés. C'est le cas le plus favorable, dans le sens où le nombre de solutions est maximum.
- (Nous aborderons la discussion sur le nombre de solutions ultérieurement.)

- Pour résoudre le problème 9, Viète établit deux lemmes.

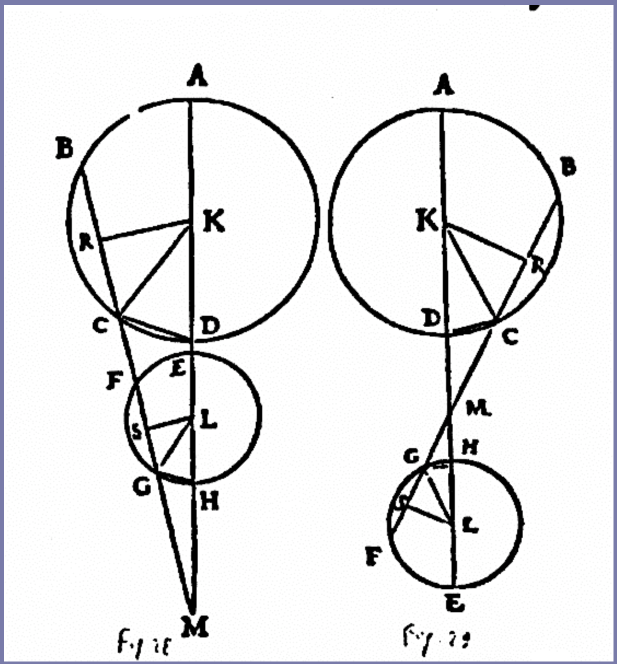
- *Lemme 1 : Etant donnés deux cercles, trouver sur la droite joignant leurs centres un point tel que les segments, obtenus en traçant une droite quelconque passant par ce point et coupant les cercles, seront semblables.*
- Nous nous donnons deux cercles ABC et EFG. Soit K le centre du premier et L le centre du second. Joignons K et L. Il faut trouver un point sur KL, tel que les segments obtenus en traçant une droite quelconque coupant les deux cercles ABC et EFG, seront semblables.
- La droite KL coupe le premier cercle en A et I, et le deuxième cercle en E et H. Plaçons sur KL le point M tel que KM soit à LM comme AK est à EL. (c'est-à-dire dans le rapport des rayons). Cette construction est donnée dans le *Supplément de géométrie* : étant donné deux droites Z et X, trouver deux droites HB et HI qui leur soient proportionnelles.



- Le point M peut être intérieur ou extérieur à KL.
- Le point M trouvé est un point qui convient. En effet, menons par M une sécante aux deux cercles, qui coupe le premier cercle en B et C et le deuxième en F et G, (B et F étant les points les plus éloignés de M). Par construction, on sait que KM est à LM comme KB est à FL. Donc KC et LG sont parallèles et les angles KBC et LFG sont égaux. Par ailleurs, KM est à KL comme KC est à LG. Donc KC et LG sont parallèles et les angles KCB et LGF sont égaux. Dans les deux triangles BKC et FGL, les angles restant BKC et FGL sont donc égaux.



- *Lemme 2 : Soient deux cercles, le premier ABCD et le second EFGH. Que la droite KL joignant leurs centres, coupe le premier cercle en A et D et le second en E et en H. Prenons sur celle-ci un point M tel que, si nous traçons une droite MGFCB, elle coupe le premier cercle en B et C et le second en F et G, que les segments de cercle soient semblables et que les points d'intersection A et B soient plus éloignés que C et D et les points F et E plus éloignés que G et H. Je dis que le rectangle sur MG et MB est égal au rectangle sur MH et MA.*

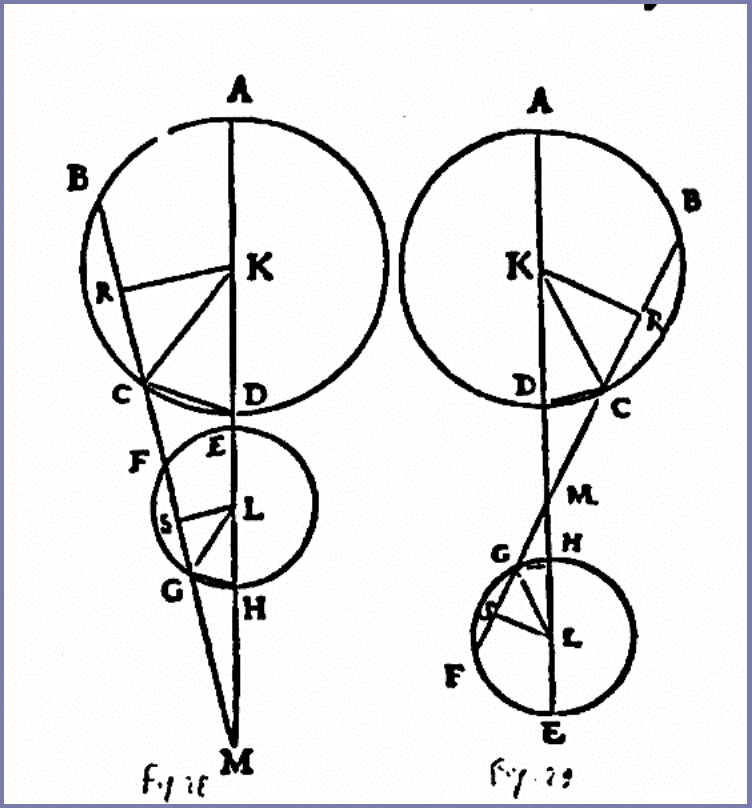


- On reprend en fait la configuration précédente du lemme 1. Des centres K et L on abaisse les perpendiculaires aux cordes BC et FG. On obtient les points R et S. Les triangles BKC et FLG étaient semblables, donc les triangles RKC et SLG le sont aussi. Donc KC et LG sont parallèles. Les angles CKD et GLH sont donc égaux les triangles KCD et LGH sont semblables., et CD est parallèle à GH. Donc MD est à MC comme MH est à MG. Or MD est à MC comme MB est à MA. Donc MH est à MG comme MB est à MA et le rectangle sur MG et MB est égal au rectangle sur MA et MH.

$$\frac{MD}{MC} = \frac{MH}{MG} \quad et \quad \frac{MD}{MC} = \frac{MB}{MA}$$

$$donc \quad \frac{MH}{MG} = \frac{MB}{MA}$$

$$ou\ encore\ MG.MB = MH.MA$$

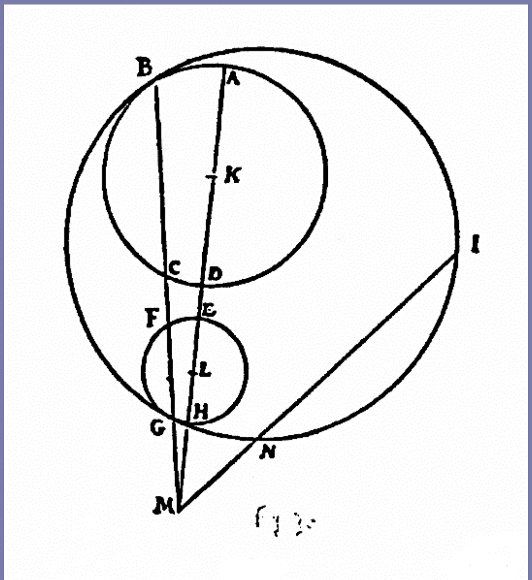


- Problème 9 : un point et deux cercles.

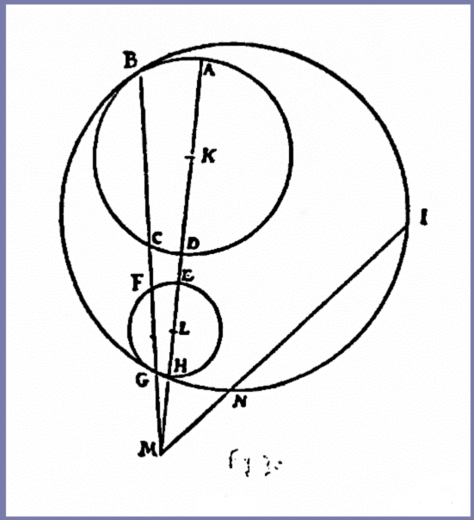
- Dans le meilleur des cas, celui qui est examiné dans *l’Apollonius Gallus*, trois solutions vont se présenter, puisque le cercle cherché peut toucher les deux cercles donnés soit tous les deux extérieurement, soit tous les deux intérieurement, soit l’un intérieurement et l’autre extérieurement

Problème 9 :

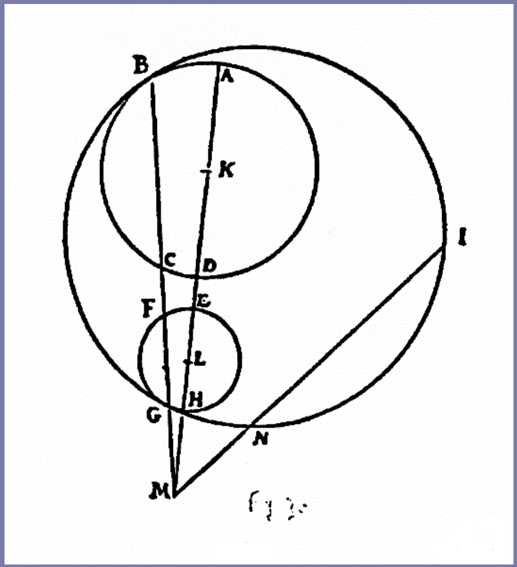
- *Étant donnés deux cercles et un point, décrire un cercle passant par le point donné, auquel soient tangents les deux cercles donnés.*
- *Soient les deux cercles donnés, le premier ABCD, le second EFGH, et en plus le point I donné. Il faut par le point I décrire un cercle auquel soient tangents les deux cercles ABCD et EFGH .*



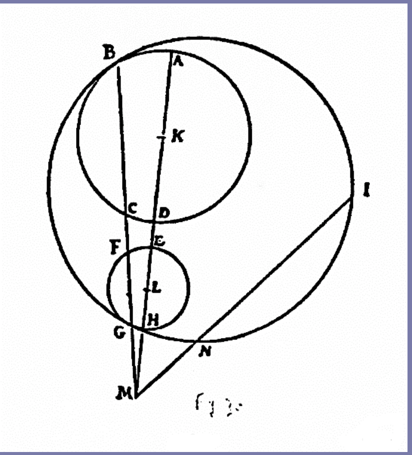
- Si K et L sont les centres des deux cercles donnés, on place sur KL, en utilisant le lemme 1, un point M tel que toute sécante aux deux cercles passant par M détermine des segments de cercles semblables. La droite KL coupe les cercles respectivement en A et D et en E et H. Sur MI, on place le point N tel que le rectangle sur MI et MN soit égal au rectangle sur MH et MA.
- Le problème 8 permet de décrire un cercle passant par I et N et tangent au cercle de centre K en un point que l'on nommera B. Il s'agit de montrer que ce cercle convient au problème 9. La droite BM coupe les cercles de centre K et L respectivement en B et C d'une part, et en F et G d'autre part. D'après le lemme 2, le rectangle sur MG et MB est égal au rectangle sur MH et MA, qui lui-même est égal au rectangle sur MN et MI. Donc le rectangle sur MG et MB est égal au rectangle sur MN et MI ce qui signifie que les points NIBG sont cocycliques.

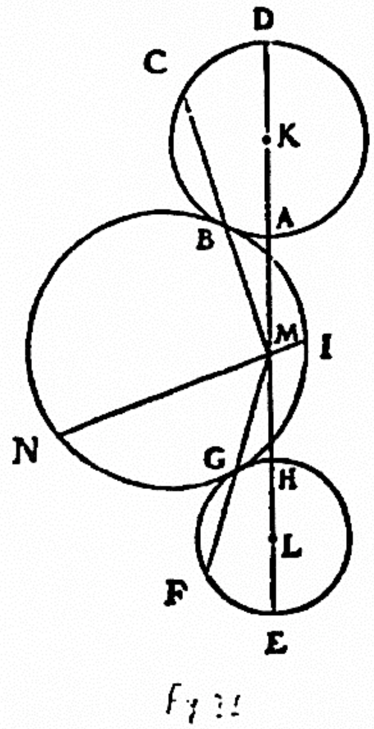


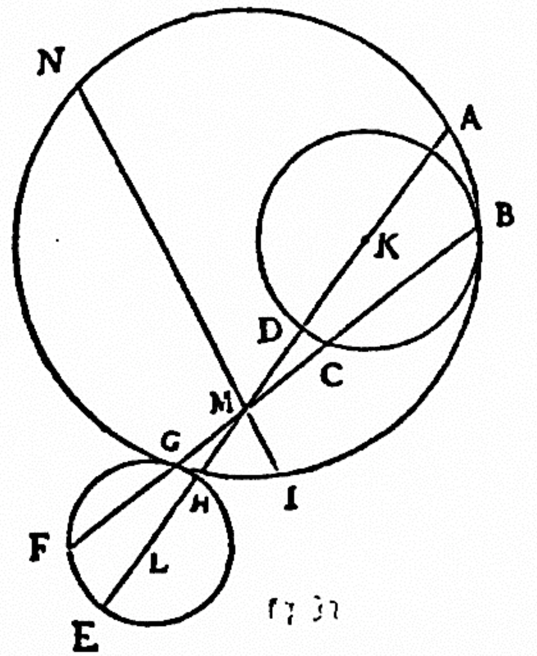
- Le point G est donc à la fois sur le cercle de centre L et sur le dernier cercle construit. Ces deux cercles sont donc soit sécants, soit tangents en G.
- Les deux cercles ABCD et BIN sont tangents en B. Donc, affirme Viète, les segments de cercle BC et BG sont semblables (voir encadré ci-dessous). Par ailleurs, les segments de cercle BC et FG sont semblables (lemme 1), donc finalement les segments de cercles FG et BG sont semblables. Ainsi, d'après le lemme 2 du problème 6, les cercles ne se coupent pas, donc sont tangents.



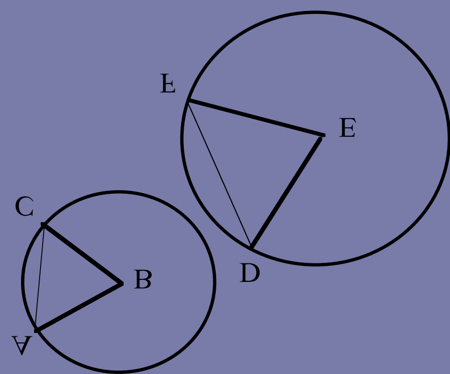
- Voici les trois figures relatives au problème 9

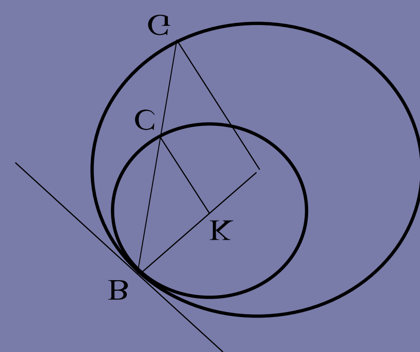






- *Explication pour « les segments de cercles sont semblables »*
- Un « segment de cercle » est la figure comprise entre une corde et un arc correspondant. Les segments de cercle AC et DF sont dits *semblables* lorsque les triangles ABC et DEF sont semblables, donc si les angles ABC et DEF sont égaux
- Viète affirme dans le problème 9 que les segments de cercle GB et BC sont semblables, lorsque les cercles sont tangents en B. Ceci apparaît clairement sur la figure où l’on a tracé la tangente commune aux deux cercles.





Problème 10

- . Dans le meilleur des cas, qui est examiné dans l'Apollonius Gallus, il y aura huit solutions. En effet, le cercle cherché peut toucher chacun des cercles donnés de deux façons, intérieurement ou extérieurement. Un calcul très simple permet de déduire les huit cas possibles.

- *Etant donnés trois cercles, décrire un quatrième cercle qui les touche tous les trois. Soit trois cercles donnés, le premier de centre A, le second de centre B et le troisième de centre D. Il faut décrire un cercle qui touche ces trois cercles.*
- Ici Viète suppose implicitement que les rayons des cercles sont différents deux à deux. En prenant pour centre D et pour rayon DF, la somme ou la différence des rayons du cercle 1 et du cercle 3, décrivons un premier cercle auxiliaire. En prenant pour centre B et pour rayon BG, la somme ou la différence des rayons du cercle 1 et du cercle 2, décrivons un second cercle auxiliaire. Enfin décrivons par le point A un cercle AFG auquel les cercle auxiliaires soient tangents en G et F, et dont le centre sera E (problème 9).

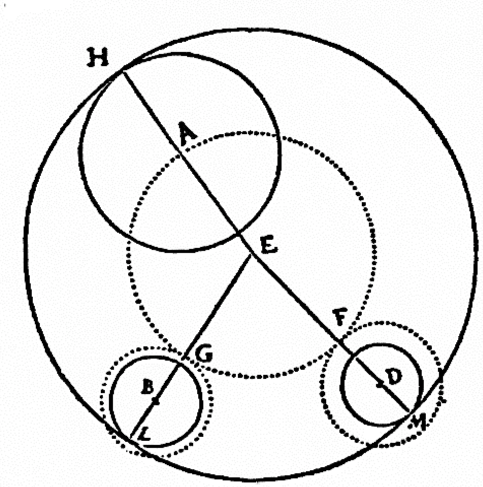


Fig. 37

- Le point E sera aussi le centre d’un cercle tangent aux trois cercles donnés. En effet, traçons à partir du point E une droite passant par le centre d’un des cercles donnés, et traçons le cercle HLM de rayon EH, en tenant compte des différents cas de figures.
  - Par exemple, dans le cas 1, le quatrième cercle enveloppe les trois cercles donnés. DF est la différence entre le rayon du grand cercle de centre A et du plus petit de centre D ; BG est la différence entre le rayon du plus grand cercle et celui du moyen. Par le point A, on décrit le cercle qui touche les cercles auxiliaires à l’extérieur. Nous avons :
- DF = R1 — R3
- BG = R1 — R2
- EA = EG = EF.
- Il s’agit de justifier que EL = EM = EH. Or :
- EL = EG + GL = EA + GB + GL = EA + R1 — R2 + R2 = EA + R1 = EH
- EM = EF + FM = EA + FD + DM = EA + R1 — R3 + R3
- = EA + R1 = EH

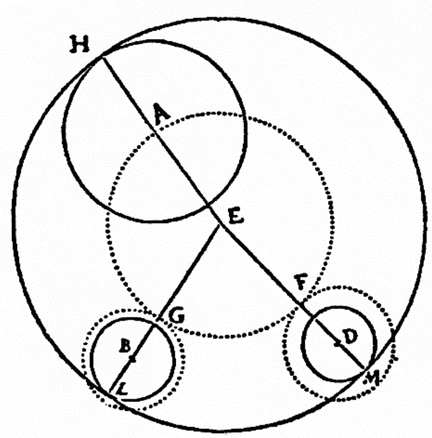
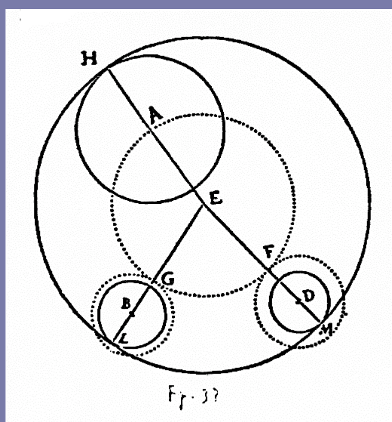
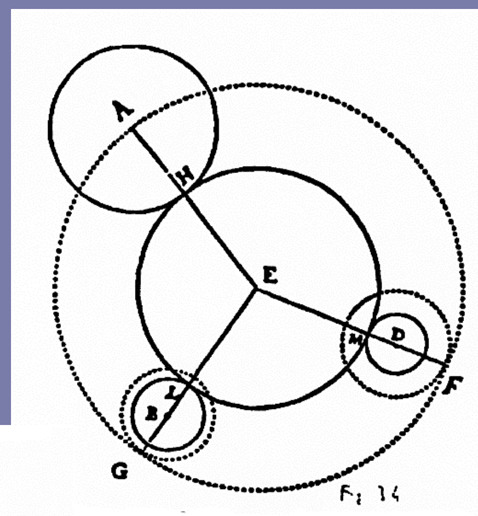
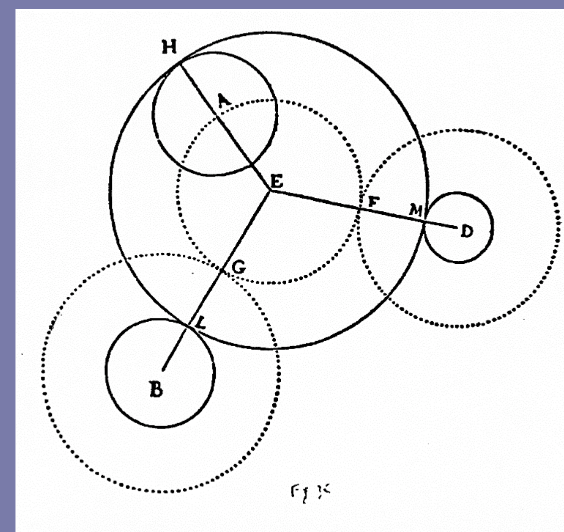


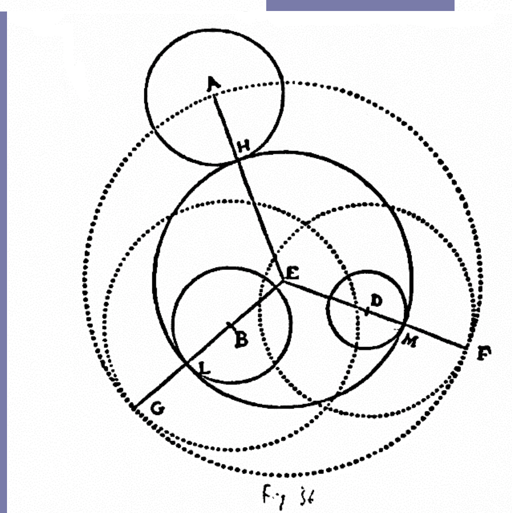
Fig. 37

- Il est clair que, en jouant sur les sommes ou différences de rayons, donc, par réduction ou agrandissement des cercles auxiliaires, tous les cas répondant au problème 10 sont obtenus.
- Voici les quatre figures relatives au problème 10 :









Conclusion de Viète

- *Ces démarches valent pour absolument tous les cas de tracé d'un cercle en contact avec des cercles et des lignes droites. Quant à la méthode particulière au tracé d'un cercle en contact avec trois cercles déjà en contact entre eux, elle méritait un traitement particulier. Car il est difficile de proposer méthode plus utile particulièrement en matière d'astronomie et de mécanique des* αυτοματα [machines]. *Mais il y a déjà plusieurs années que j'ai fourni une réponse à propos de ce problème au très éminent Jacques Fleury, doyen du Sénat de Paris et que j'ai reproduit ma réponse dans le livre six de mes Oeuvres variées. Voici donc le seul point sur lequel je veux te mettre en garde, Belge naïf. Celui auquel il est demandé d'extraire la racine carrée de 2 et qui donne comme racine 141.421.354 / 100.000.000 agit aussi habilement que celui qui donne comme racine 141.421.354.237.509.505 / 100.000.000.000.000.000.*

Le dernier fournit plus de travail, mais ne montre pas plus d'intelligence. Ainsi, si je prends un rayon de cercle de 100.000.000 de petites parties et que je trouve pour la corde sous-tendant un arc de 16 scrupules, une valeur de 58,329 de ces petites parties, je ne le céderai en rien à celui que satisferont des figures plus vastes et qui aura choisi un rayon de 1000 myriades de myriades. Bien mieux, je dirai qu'il abuse de son temps et de sa peine, sachant que cela n'a aucun intérêt. Il faut fuir ce qui met les intelligences à la torture et il faut éviter la ματαιοτεχηνι’α[le travail qui n'a pas de sens]. *Par conséquent la construction de parallèles que tu emploies sur la foi de ton Louis est aussi hyperbolique (exagérée) et ta candeur m'interdit qu'elles m'émeuvent. Ton Louis est un calculateur particulièrement subtil et expérimenté et je désire que vous soyez, lui et toi, mes amis. Salut.*

La postérité

- Retentissement immédiat, mais les essais de traduction tardent.

Exemple :1634 : Hérigone traduction en langage symbolique

APOLLONII PERGÆI

TACTIONVM GEOMETRIA, à Franciſco Vieta reſtituta.

LA GEOMETRIE DES ATTOVchements d'Apollonius Pergeus, reſtituée par François Viete.

PROBL. I.

PER data duo puncta circulum magnitudine datum deſcribere.

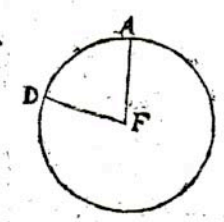
PAR deux poincts donnez deſcrire vn cercle de grandeur donné.

Hypoth. B ——

a & d *ſnt* •; D;

b *eſt* —D.

Req. eſt ⊙fad & fa 2|2 b.



Conſtr.

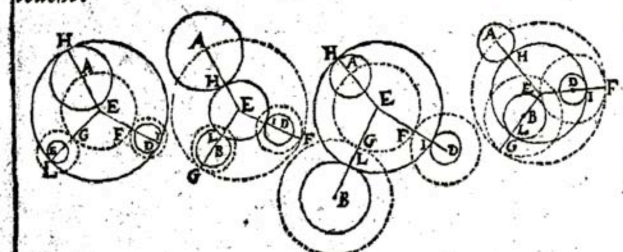
22.1	af,df,b *ſnt* 2|2 ∢e.		*Demonſtr.*
3.p.1	fad *eſt* ⊙.	hyp.	b *eſt* — D.
ſymp.	*Req. eſt* ⊙ad.	conſtr.	fa 2|2 b,

c.35.& 36.3	•; i,n,g,b *ſnt* ∢n ⊙inb	21.app.	⌓ fg *ſml.* ⌓ bc,
conſtr.	b *eſt* •..*contact.*	21.6 concl.	⌓ fg *ſml.* ⌓ bg,
21.app.	⌓ bg *ſml.* ⌓ bc,	2.1.11.t.	⊙fgh *tāg:* ⊙bgi ∢n g

PROBL. XVI.

Datis tribus circulis, deſcribere quartum circulum quem illi contingant.

Trois cercles eſtant donnez, deſcrire vn quatrieſme qui les touche.



	Hypoth.	15.t.	⊙eagf *eſt deſcript.* p
	ah,bl,di *ſnt* ⊙;D;		a & *tāg:* ⊙;bg & df
	Req. eſt ⊙ehli.	1&2.p.1	eah,ebl,edi *ſnt* —,
	Conſtr.	3.p.1	ehli *eſt* ⊙.
3.1	df 2|2 ah.∼:di,	ſymp.	*Req. eſt* ⊙ehli.
	⫴ ah.+di,		*Demonſtr.*
3.p.1	df *eſt* ⊙.		
3.1	bg 2|2 ah.∼:bl,⫴ah +bl,	2&3.a.1 concl. 11&12.3	eh,el,ei *ſnt* 2|2 ∢e, ⊙hli *tang:* ⊙ah, ⊙bl & ⊙di.
3.p.1	bg *eſt* ⊙,		

- Fermat transpose le problème à l’espace : décrire une sphère tangente à quatre sphères données.

Il suit pas à pas la démarche de *l’Apollonius Gallus*, louant au passage la très belle géométrie de François Viète.

- Les siècles passent, le problème des trois cercles, puis celui des quatre sphères, seront l’objet de nouveaux défis. Chacun proposant en quelque sorte de tester la valeur de sa géométrie, tant au plan de l’efficacité que de l’élégance, sur ces deux problèmes, celui de *l’Apollonius Gallus* en particulier : supériorité de la géométrie analytique sur la géométrie des anciens, de la géométrie synthétique du XIXe siècle sur la géométrie analytique, etc. Ainsi de « grands » et de moins grands mathématiciens s’y frotteront. Michel Chasles en a cité une liste très partielle..

- *Ce problème, un de ceux où l'analyse algébrique ne s'applique pas avec facilité, occupa aussi Descartes ; et de deux solutions qu'il en trouva, il convient lui-même que l'une lui donnait une expression si compliquée, qu'il n'entreprendrait pas de la construire en un mois. L'autre, quoique moins embarrassée, l'est encore assez pour que Descartes n'ait osé y toucher. Remarquons enfin au sujet de ce problème, une anecdote qui l'illustre en quelque sorte. C'est que la princesse Élisabeth de Bohème, qui honorait, comme l'on sait, notre philosophe de sa correspondance, daigna s'en occuper, et lui envoya une solution ; mais comme elle est tirée du calcul algébrique, elle a les mêmes inconvénients que celle de Descartes.*
  - Montucla,J.F. Histoire des mathématiques, Paris, an VII, tome I; p.252. (réed. Blanchard, 1968)

- *A la vue de la clarté lumineuse qui accompagne le plus souvent la méthode des anciens, je ne puis me refuser à quelques réflexions.*

  (...)

  Je pourrais citer pour exemple, l'un des problèmes donnés dans la note A, savoir celui de faire toucher trois cercles donnés de position par un quatrième. Quiconque comparera les solutions élégantes que Viète et Newton ont données de ce problème, avec celle que présente le calcul algébrique, et celle de Descartes sera obligé de convenir que ce dernier avait tort de déprimer, comme il faisait, la méthode ancienne.

  Je suis cependant bien éloigné de méconnaître la supériorité de l'analyse moderne, à d'autres égards, sur celle des anciens. Je n'ai prétendu blâmer que l'abus d'appliquer le calcul à des cas où, un peu plus d'attention, ou plus de connaissance en géométrie, fournirait des solutions bien plus satisfaisantes pour l'esprit. Car, de même qu'on ne se sert pas du quart de cercle pour mesurer un objet qu'on a sous la main, ainsi ne doit-on pas employer le calcul algébrique dans des questions où il est superflu. Montucla.

Newton

- Newton va nous offrir deux solutions du problème d'Apollonius.
- Nous trouvons d'une part une démonstration selon une "géométrie sans calcul", dans le *livre I* des *Principia*, d'autre part une démonstration que l'on qualifiera d'algébrique, dans *Arithmetica Universalis*.

- *Il semblerait que Newton l'ait inséré[le développement mathématique du livre I] pour donner une démonstration publique de sa musculature mathématique. Dans un ouvrage qui renonçait aux formes établies de l'analyse moderne, il publia une solution du lieu géométrique qui donnait un démenti à la prétention cartésienne en renonçant également au secours de l'analyse moderne.*
    - » Richard Westfall

Lemme XVI

Trouver un point duquel tirant des lignes droites à trois points donnés, les différences de ces droites soient nulles ou données.

- A la fin de la démonstration, nous trouvons :

Le problème se résoud aussi par le livre des touchantes d'Apollonius restitué par Viète.

Lorsqu'on est maître de choisir entre plusieurs constructions également géométriques, il faut toujours choisir la plus simple : cette règle n'admet point d'exception. Or les expressions algébriques les plus simples ne sont pas toujours les plus faciles à construire. La simplicité que l'on doit préférer ne doit donc s'entendre que de la simplicité de description : c'est elle uniquement que considéraient les géomètres qui rangeaient le cercle dans la même classe que la ligne droite..

Car si l'on réfléchit bien aux constructions des problèmes par la ligne droite et le cercle, telles que les ont imaginées les anciens géomètres, on verra facilement qu'ils n'y ont eu recours qu'afin d'éviter, par le tracer facile de quelques lignes, l'ennui des longs calculs . Il ne faut donc pas confondre ces deux sciences ; les anciens en séparaient les limites avec tant de soin, que jamais ils ne se sont permis d'introduire des termes d'arithmétique dans la géométrie ; et les modernes en les confondant, ont fait disparaître la simplicité qui fait toute l'élégance de la géométrie. La simplicité arithmétique consiste à exprimer une question par l'équation la plus simple, et la simplicité géométrique, à résoudre une équation en menant les lignes les plus simples.

– Newton I., Arithmetica universalis, traduction française de N. Beaudeux, 1802.

- A la fin du 18° siècle, la géométrie « analytique » semble établir sa supériorité.
- Cependant, avec les travaux de Monge, de Poncelet, … la géométrie synthétique va réapparaître sous un jour nouveau.
- Une sorte de « combat » des deux géométries.
- Et pour tester la puissance des méthodes nouvelles, un des problèmes choisi est celui du cercle tangent à trois cercles donnés.
  - Construire directement le problème 10
  - Commencer à examiner tous les cas possibles
  - Élargir le problème à des éléments « imaginaires » éventuels.

- Solution « analytique » la plus connues : celle de Gergonne.
- Elle se confond en fait avec les solutions synthétiques apportées par la géométrie « moderne » du 19° siècle.

J'entendais, en effet, répéter sans cesse, comme une chose tout-à-fait hors de doute, que, malgré les avantages qu'offrait la géométrie analitique, sous le point de vue de la généralité et de l'uniformité des procédés, elle ne pouvait donner, pour la solution des problèmes, des constructions comparables, pour l'élégance et la simplicité, à celle dont les géomètres de l'antiquité, et ceux d'entre les modernes qui ont marché sur leurs traces, nous ont laissé de si beaux exemples ; et cependant je voyais plusieurs de ces problèmes céder sans efforts aux procédés du calcul ; je voyais ces procédés conduire à des constructions incomparablement plus simples et plus élégantes que tout ce qu'on avait connu jusqu'alors. La géométrie analitique m'avait conduit, en particulier, pour la recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan et pour celle de la sphère qui en touche quatre autres dans l'espace, à des constructions qui, indépendamment d'une merveilleuse simplicité, avaient à la fois l'avantage de fournir une solution directe de ces problèmes plus simples qui en forment communément le cortège.

Gergonne, J. D., Réflexions sur l'article précédent, Annales de mathématiques pures et appliquées, tome VIII, n° V, novembre 1817

Durrande, J. B., Annales de mathématiques pures et appliquées, tome XI, n° I, juillet 1820

Mais indépendamment de leur élégant laconisme qui permet d'en réduire l'énoncé à quelques mots, ce qui distingue éminemment les constructions de M. Gergonne, ce qui leur assure une incontestable supériorité, c'est que, tandis que jusqu'ici on n'était généralement parvenu à résoudre ces problèmes qu'en les ramenant successivement à d'autres, de plus en plus faciles ; ce qui en définitive, rendait la construction assez compliquée.

Cependant puisqu'il s'agit de rivaliser, l'auteur du mémoire se place sur le même terrain et dans les mêmes termes :

- *Dans le dessein de venger l'ancienne géométrie du reproche d'impuissance dont ces mêmes problèmes ont semblé offrir un nouveau motif, je ne puis donc rien faire de plus convenable que de lutter avec elle seule contre ce que la géométrie analitique offre peut-être de plus élégant, et de montrer que par de simples comparaisons de triangles, on peut facilement être conduit à ces mêmes constructions auxquelles M. Gergonne est parvenu par une voie tout à fait différente.*

- Un nom revient dans tous les exposés, c'est celui de Louis Gaultier de Tours, ancien élève de l'École polytechnique et professeur de géométrie descriptive au conservatoire des Arts et Métiers. On lui doit en particulier les noms d'axe radical et de centre radical, pour la figure formée de deux ou trois cercles. Cette dénomination est apparue dans un très beau mémoire, lu à la première classe de l'institut le 15 juin 1812, et publié dans le journal de l'École polytechnique, dans le cahier n°16 en 1813 : *Sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions, et une sphère déterminée par quatre conditions*.

  - *La marche que nous avons suivie nous a fourni l'occasion de développer un grand nombre de propositions neuves ; mais nous ne nous sommes point bornés à de simples considérations géométriques, puisque nous donnons les moyens d'effectuer graphiquement toutes les solutions.*

Emile Lemoine, dans les *Nouvelles annales de mathématiques : Dans le numéro de juin 1892, page 227 de ce journal, se trouve le commencement d'un très intéressant article de M. Maurice Fouché, sur le célèbre problème d'Apollonius : mener des cercles tangents à trois cercles donnés. Je ne connais pas de question particulière de géométrie élémentaire qui ait donné lieu à tant de travaux et ingénieuses solutions. Il n'y a pour ainsi dire pas d'années où quelque géomètre n'ait publié soit une solution nouvelle, soit des remarques nouvelles, soit quelque démonstration nouvelle au sujet du célèbre problème.*

Lemoine teste dans Les Nouvelles Annales sa méthode d'évaluation de la simplicité d'une construction géométrique, ce qu'il nomme « la géométrographie ». Le problème qu'il a choisi est justement celui de *l'Apollonius Gallus*. Et ce qu'il découvre, c'est que, du point de vue de ses critères, une des meilleures solutions est celle de Viète.

- Un autre mathématicien se préoccupe de « géométrographie », c'est Jacob Steiner.
- Il utilisera ce qu'on nomme maintenant inversion pour résoudre le problème.

C'est une chose vraiment différente de mettre à exécution une construction, c'est-à-dire avec les instruments à la main, et de la mener à bonne fin, si je peux m'exprimer ainsi, simplement par le moyen de la parole. Il est en effet facile de dire : je vais faire cela, puis cela et ensuite ceci ; mais la difficulté, et nous pouvons le dire dans certains cas l'impossibilité, d'achever vraiment des constructions qui sont hautement compliquées nous demande de peser prudemment dans un problème lequel des différents procédés est le plus simple pour la construction complète, ou lequel convient le plus selon des circonstances particulières et ce qui doit être écarté de ce que la parole émet parfois inconsidérément, quand il s'agit d'épargner tout souci superflu, ou d'atteindre la meilleure précision

Jacob Steiner 1833

discussion de Jacques Hadamard du nombre de solutions possibles selon les trois cercles donnés au départ.

I :	8 solutions
II :	idem
III :	néant
IV :	idem
V :	4 solutions
VI :	idem
VII :	idem
VIII :	idem
IX :	idem
X :	idem
XI :	8 solutions