Exercice 491-4

I . Énoncé

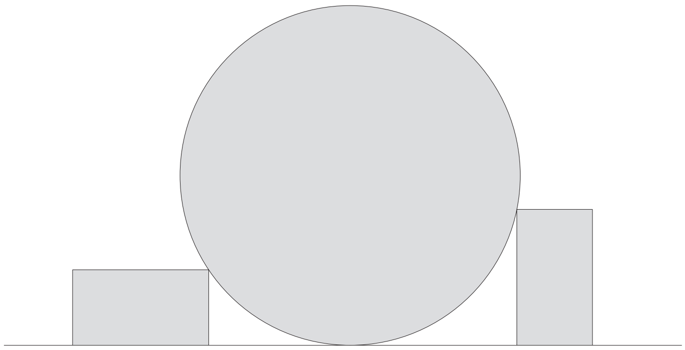
Deux pavés $10 \times 18 \times L$ sont disposés des deux côtés d'un cylindre de longueur L pour l'empêcher de rouler. L'un des pavés a une face $10 \times L$ sur le sol tandis que l'autre a une face $18 \times L$ sur le sol. L'un des pavés dépasse en largeur de 4 unités de plus que l'autre, par rapport à la génératrice posée sur le sol.

Calculer le rayon R du cylindre sachant qu'il s'agit d'un entier strictement supérieur à 18.

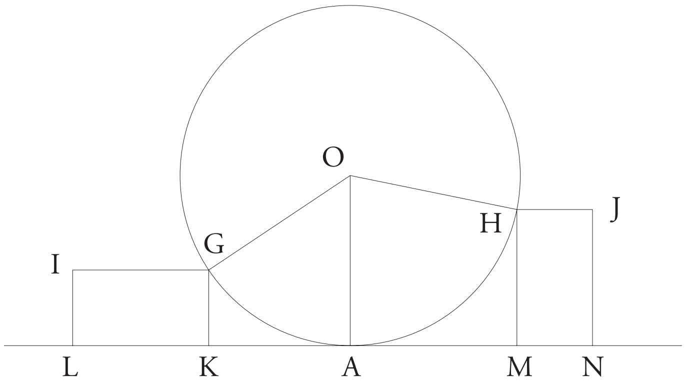
II . Hypothèse, notations et conséquences

1 . On suppose que la longueur L des faces posées sur le sol pour chacun des deux pavés est parallèle à la génératrice posée sur le sol.

2 . La vue de face ou une coupe par un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre est alors :



On adoptera les notations suivantes :



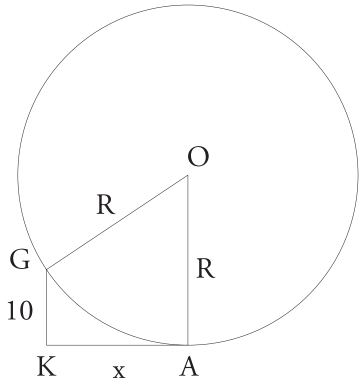
3 . On a donc :

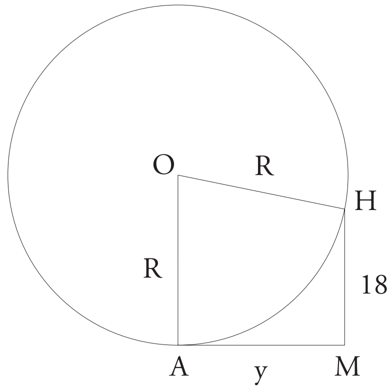
$OG = OA = OH = R$,

$IG = LK = HM = JN = 18$ et

$IL = GK = HJ = MN = 10$.

4 . En complément, on s'intéressera aux trapèzes rectangles OAKG et OAMH en posant $AK = x$





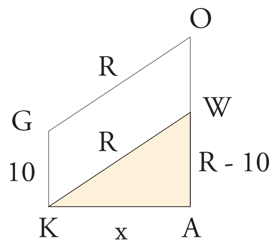
et $AM = y$.

III . Résolution

L'un des pavés dépassant en largeur de 4 unités de plus que l'autre, par rapport à la génératrice posée sur le sol, on peut écrire $AL = AN + 4$ ou bien $AN = AL + 4$ c'est-à-dire $x + 18 = y + 10 + 4$ ou bien $y + 10 = x + 18 + 4$.

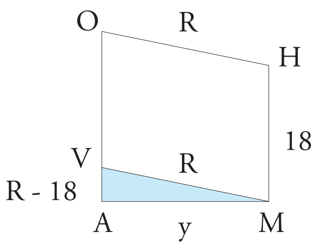
Les deux cas à envisager sont donc : $y = x + 4$ et $y = x + 12$.

Dans le trapèze OAKG, la parallèle à (OG) passant par K coupe [OA] en W. Le triangle AKW est



rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore, $AK^2 = KW^2 - AW^2$ soit $x^2 = R^2 - (R - 10)^2 = 20R - 100$.

On procède de la même façon avec le trapèze OAMH dans lequel la parallèle à (OH) passant par M coupe [OA] en V. Le triangle AMV est rectangle en A ce qui autorise à écrire $AM^2 = MV^2 - AV^2$



soit $y^2 = R^2 - (R - 18)^2 = 36R - 324$.

1 . Cas où $y = x + 4$

Alors $y^2 = x^2 + 8x + 16$ qu'on peut transformer en $36R - 324 = 20R - 100 + 8x + 16$ dont on tire $8x = 16R - 240$ puis $x = 2R - 30$ et enfin $x^2 = 4R^2 - 120R + 900$.

Or $x^2 = 20R - 100$ donc $4R^2 - 120R + 900 = 20R - 100$ ce qui donne $4R^2 - 140R + 1\ 000 = 0$ ou bien encore $R^2 - 35R + 250 = 0$.

Le discriminant valant $\Delta = 35^2 - 4 \times 250 = 225$, l'équation a deux racines $R = 25$ et $R = 10$ dont on ne conserve que la première au vu des conditions imposées par l'énoncé.

2 . Cas où $y = x + 12$

Alors $y^2 = x^2 + 24x + 144$ qui conduit à $36R - 324 = 20R - 100 + 24x + 144$ d'où $24x = 16R - 368$ ou bien $3x = 2R - 46$ et $9x^2 = 4R^2 - 184R + 2\ 116$.

Comme $x^2 = 20R - 100$, on a $4R^2 - 184R + 2\ 116 = 180R - 900$ qui donne $4R^2 - 364R + 3\ 016 = 0$ soit $R^2 - 91R + 754 = 0$.

Son discriminant est $\Delta' = 91^2 - 4 \times 754 = 5\ 265$, mais 5 265 n'est pas le carré d'un entier donc les racines de l'équation à coefficients entiers ne sont pas entières et à ce titre, ne peuvent être retenues si l'on veut tenir compte des conditions imposées.

En remarque et si l'on n'imposait pas aux racines d'être entières, il y aurait une seconde solution : $\dfrac{91 + \sqrt{5\ 265}}{2}$.

En conclusion, le problème n'admet qu'une solution, un rayon de 25 pour le cylindre.

IV . Illustration-recherche à l'aide du logiciel GeoGebra

Le fichier est APM_491_4.ggb

De nombreux éléments de la figure peuvent être manipulés librement mais pour s'en tenir à l'énoncé, seule la mobilité du point O, assujetti à parcourir la demi droite d d'origine U perpendiculaire à (LN), permet de trouver les deux solutions (ordonnées de O) dont on pourra constater que l'une est entière et l'autre non, avec la précision autorisée par le logiciel.

La longueur du segment bleu mesure la distance de la génératrice posée sur le sol à l'arête la plus éloignée du pavé de gauche, la longueur du segment rouge celle de cette même génératrice à l'arête la plus éloignée du pavé de droite et le segment vert est le symétrique du bleu par rapport à cette génératrice. Le point commun aux segments orange et lilas, tous deux de 4 unités de longueur, est l'extrémité droite du segment vert.

N_1 et N_2 sont les points situés sur la droite (LN) à 4 unités de l'extrémité droite du segment vert.

En déplaçant le point O comme il vient d'être dit, il s'agit de rendre nulle l'une des distances NN_1 ou NN_2. Il suffit alors de lire le rayon du cylindre.