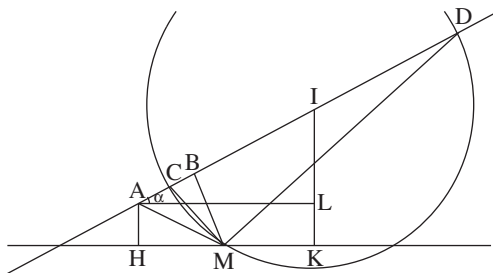


Solution de Robert Bourdon (Tourgeville)

Robert Bourdon s'est intéressé au calcul de la valeur maximale – lorsqu'elle existe – de ce rapport. Sans reproduire in extenso tous les calculs, voici les grandes lignes de son raisonnement.



Le fil conducteur est d'introduire les points C et D de la droite (AB), qui vérifient

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} = k,$$

avec C dans [AB] (D n'existe pas lorsque $k = 1$).

Les droites (MC) et (MD) sont les bissectrices de (MA) et (MB). Elles sont donc perpendiculaires.

À partir de la configuration ci-dessus, dans laquelle I désigne le centre du cercle circonscrit au triangle CMD, et d'égalités vectorielles telles que

$$\overline{CA} = -k\overline{CB}.$$

la traduction de l'inégalité $IM \geq IK$ donne

$$k^2(h + \sin \alpha) - k - h \leq 0$$

où h désigne le rapport $\frac{AH}{AB}$ et α l'angle formé par les droites d et (AB) .

Ainsi dans cette configuration, le nombre k qui doit être compris entre les racines est maximal quand il vaut :

$$\frac{1 + \sqrt{4h^2 + 4h \sin \alpha + 1}}{2(h + \sin \alpha)}.$$