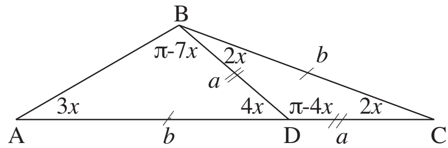
Solution de Fabrice Laurent (Provins)

Schéma et notations



On peut facilement exprimer tous les angles de cette figure en fonction de x.
De plus, on note :
BD = CD = a et BC = AD = b.

Mise en équation

Le théorème des sinus dans le triangle ABD donne : $\dfrac{\sin(3x)}{a} = \dfrac{\sin(\pi - 7x)}{b}$ soit

$\dfrac{\sin(3x)}{\sin(7x)} = \dfrac{a}{b}$.

Le théorème des sinus dans le triangle BCD donne : $\dfrac{\sin(2x)}{a} = \dfrac{\sin(\pi - 4x)}{b}$ soit

$\dfrac{\sin(2x)}{\sin(4x)} = \dfrac{a}{b}$.

L'égalité de ces deux rapports donne l'équation : $\sin(2x)\sin(7x) = \sin(3x)\sin(4x)$.

Résolution de l'équation

On utilise la formule d'Euler : $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Après développement, l'équation devient :

$$e^{i9x} - e^{-i5x} - e^{i5x} + e^{-i9x} = e^{i7x} - e^{-ix} - e^{ix} + e^{-i7x}.$$

En multipliant les deux membres de l'équation par e^{i9x}, puis en posant $X = e^{ix}$, on obtient l'équation :

$$1 - X^2 - X^4 + X^8 + X^{10} - X^{14} - X^{16} + X^{18} = 0.$$

Après factorisation :

$$\left(X-1\right)^2\left(X+1\right)^2\left(X^2+1\right)\left(1-X^6+X^{12}\right)=0.$$

Les solutions obtenues à partir des trois premiers facteurs sont : $x=0, x=\pi$ et $x=\dfrac{\pi}{2}$.
Ces trois solutions sont à rejeter pour le problème.

Les solutions obtenues à partir du qatrième facteur sont : $X^6=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$, ce qui donne la solution « géométriquement acceptable » : $x=\dfrac{\pi}{18}$ radians, soit $x=10°$.