Solution de Georges Lion (*Wallis*) :

L'inventeur de cet exercice a sans doute en vue une solution différente de celle que je propose. En dressant la liste des cubes des entiers allant de 0 à 7, on trouve immédiatement le couple (5, 7) qui vérifie les deux conditions. On va maintenant prouver qu'il n'y a pas d'autres solutions de l'équation. On a

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) \quad \text{et} \quad 4\left(x^2-xy+y^2\right)=(x+y)^2+3(x-y)^2>0 \quad ;$$

sachant $x^3+y^3=468$, on en déduit $x+y>0$.

Si x et y étaient pairs, x^3+y^3 serait multiple de 8, ce qui est faux pour 468 ; si x et y étaient de parités différentes, x^3+y^3 serait impair, ce qui est faux pour 468. Donc x et y sont impairs, x^2-xy+y^2 est impair, et sachant $468 = 4 \times 117$, x^2-xy+y^2 divise 117 (Gauss).

À ce stade, on peut écrire : $x^2-xy+y^2 \in \{1, 3, 9, 13, 39, 117\}$.

Or modulo 4, $x+y=0$; donc $x \neq y$ et $x^2-xy+y^2 = 1 - 3 + 1 = 3$.

Deux cas seuls restent à étudier : $x^2-xy+y^2 = 3$ ou 39, c'est-à-dire $x+y = 156$ ou 12.

Si $x+y=156$, alors $3xy = 1\,562 - 3$, $xy = 8111$, $(x+y)^2-4xy<0$, impossible.

Si $x+y=12$ alors $3xy = 144 - 39$, $xy = 35$. La solution (5, 7) trouvée a priori est la seule.

Autres solutions (à partir des mêmes idées) : Catherine Grimaud (*Paris*), Michel Hébraud (*Toulouse*). Raymond Raynaud (*Digne*) généralise le problème dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$: les seules solutions restent (5, 7) et (7, 5).