Marcher sur d’autres pistes en Mathématiques

Comment les textes de compétitions, rallyes ou tournois mathématiques peuvent-ils enrichir notre enseignement et contribuer à répondre aux différentes attentes des élèves ?

Pour introduire le propos, rappelons que la démarche qui consiste à « Interpeler, provoquer la curiosité, travailler en interdisciplinarité… » n’est pas nouvelle !
Pour preuve, nous avons donné des exemples de textes tirés de l’ouvrage

Eléments d’Algèbre

Corrigés d’exercices de Carlo Bourlet de 1906

Problèmes tirés de l’Anthologie grecque

Aujourd’hui nous prendrons nos exemples dans une brochure évidemment plus récente puisqu’il s’agit de Panoramath 5 que le CIJM vient de publier

Avec ce ***Panoramath 5,*** le CIJM innove et complète sa collection initiée en 1996. En demandant à chaque compétition de choisir deux ou trois de ses sujets les plus originaux, les plus significatifs et de les analyser, ce ***Panoramath 5*** a pour ambition d’être un outil pédagogique permettant de donner le goût de la recherche .
Cet ouvrage devrait permettre aux enseignants, aux animateurs de clubs, d’ateliers scientifiques ou aux organisateurs de compétitions mathématiques, l’utilisation de l’activité ludique en mathématique dans la classe ou en animation grand public. Il expose la richesse de ces activités, leur impact pédagogique et leur place dans l’acquisition des connaissance ainsi que leurs prolongements possibles.
33 compétitions et associations ont participé à cette brochure.
Une grande diversité règne ! Il y a donc de nombreuses pistes et un cocktail d’idées à explorer.

Les premiers exemples que nous avons donné et sur lesquels chaque participant à l’atelier à travailler étaient dans le domaine numérique

Il était deux fois

Tournoi mathématique du Limousin Collège 2001

Vous allez écrire un nombre à huit chiffres, le plus grand possible, répondant aux conditions suivantes :
Il y a deux fois le chiffre 4, deux fois le chiffre 3, deux fois le chiffre 2 et deux fois le chiffre 1 .
Entre les deux chiffres 4 il y a quatre chiffres, entre les deux chiffres 3 il y a trois chiffres, entre les deux chiffres 2 il y a deux chiffres et entre les deux chiffres 1 il y a un chiffre.
Racontez-nous comment vous faites.

Niveau scolaire :
Pour les élèves de 9 à 12 ans.
Domaines mathématiques :
Arithmétique : écriture décimale des nombres, ordre dans les entiers.

Les participants ont cherché soit papier crayon soit en manipulant et ce fut l'occasion de parler de la différence des méthodes de recherche mises en place.

Nous avons ensuite évoqués les différents prolongements possibles , tous développés dans Panoramath 5, en particulier
D'une part

Le problème est un cas particulier (pour n =4) du problème publié en 1958 par le mathématicien écossais C.D. Langford

"*Existe-t-il pour tout n entier naturel au moins un arrangement des paires des nombres entiers de 1 à n tel que la paire de 1 encadre un seul nombre, la paire de 2 encadre deux nombres, …., la paire de n encadre n nombres ?*"

D'autre part **celui des "Suites de Skolem"**

"Existe-t-il pour tout n entier naturel au moins un arrangement des paires des nombres entiers de 1 à n tel que les deux 1 soient contigus, la paire de 2 encadre un seul nombre, …., la paire de n encadre n -1 nombres ?"

2010 en Mésopotamie

Chasse au trésor Mathématique
(compétition sur internet organisée par le CIJM et les Amis des Jeux Mathématiques)

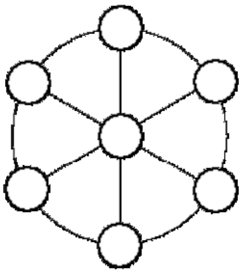
Marco, qui vient d'apprendre la numération babylonienne, a écrit le nombre 2010 et l'a envoyé à son frère Polo.
Ce dernier, ne comprenant pas, crut à un appel à l'aide et renvoya un message à son frère qui fut très surpris de recevoir comme réponse les nombres 5500, 5650, 13 et 8700876670.

Qu'a voulu dire Polo ?

Ce texte a permis d'évoquer tout le travail que l'on peut faire en classe à partir de la numérotation babylonnienne.
La numération que forgèrent les mathématiciens et astronomes de Babylone un peu avant l'époque du roi Hammourabi (environ 1792-1750 av. J.-C.) était une numération de position en base 60.

La roue magique (Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques)

L'énoncé



Les cases de la roue ci-dessus contenaient les nombres de 1 à 7. Cette roue était « magique », c'est-à-dire que la somme des nombres inscrits dans chaque groupe de trois cases alignées était toujours la même.

Quel nombre était inscrit dans la case centrale ?

Domaine de compétence (selon le niveau scolaire) :
arithmétique, divisibilité, congruences

Analyse de la tâche :

• Constater que la somme de deux nombres placés aux extrémités d'un même diamètre doit être constante et que cette somme est égale au tiers de la somme des nombres de 1 à 7 diminuée de la valeur du nombre central.

• Le nombre central c doit donc être tel que $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) - c$ soit divisible par 3. On en déduit que c doit être congru à 1 modulo 3, d'où trois candidats pour le nombre central : 1, 4 et 7.

• Il faut bien sûr ensuite vérifier que ces valeurs conduisent effectivement à des solutions existantes.

Prolongements et commentaires :

Cet énoncé a fait l'objet d'une réalisation sous la forme d'un jeu plastifié utilisé dans des animations (voir photo). L'objectif est ici de poser les sept pions en respectant la condition d'égalité des sommes sur les trois alignements, deux solutions avec le même nombre central étant considérées comme identiques.

Nous avons pu ainsi observer les stratégies de résolution du jeu par divers publics, depuis les élèves de l'école élémentaire jusqu'aux adultes de tous âges, y compris des membres d'un club de personnes âgées dont la moyenne d'âge était supérieure à 75 ans.

Une première remarque est que généralement, très peu de gens ressentent la nécessité, une fois une solution découverte, de se demander si la solution trouvée est unique, et dans la négative de déterminer l'ensemble des solutions.

Les stratégies observées :

• Une première stratégie observée aussi bien chez des petits que chez des « grands » (sauf peut-être chez les lycéens qui essaient ‘analyser le jeu avant de poser des pions) consiste à poser des pions « un peu au hasard ».
Certains mettent n’importe quel pion au centre, mais beaucoup mettent le « 1 » (premier nombre de la suite). Beaucoup continuent en plaçant le « 2 » et le « 3 » sur un même diamètre, puis réalisent que les nombres restants sont trop grands pour permettre de réaliser la somme « 6 » sur les autres diamètres, d’où la nécessité « d’équilibrer » ...

• Une deuxième stratégie consiste à poser un pion quelconque au centre (par chance, c’est souvent le « 1 », qui conduit à une solution ; parfois le choix est moins heureux lorsque le joueur pose le « 2 », le « 3 », le « 5 » ou le « 6 » au centre).
Le joueur cherche ensuite à « équilibrer » les pions restants en les répartissant en trois ensembles des deux pions de sommes égales. Il découvre parfois que c’est impossible s’il avait posé au centre un nombre autre que 1, 4 ou 7, et doit alors changer ce nombre central.

• Une troisième stratégie, observée plus rarement, consiste à additionner les nombres de 1 à 7 (le total est 28) puis à se demander quel nombre peut être placé au centre de façon que la somme des six nombres restants soit divisible par 3. Cette stratégie conduit à explorer l’ensemble des solutions et à les trouver toutes.

Une propriété est intéressante à observer : la dualité.
A partir d’une solution donnée, en remplaçant chaque nombre par son complément à 8, on obtient une solution duale, la solution avec « 4 » au centre étant « autoduale ».

Puis nous avons donné des exemples tirés du domaine géométrique

Jean Centaire

Tournoi mathématique du Limousin (lycée)

Les enfants de la famille Centaire doivent se partager équitablement, c'est-à-dire de façon que les parts aient toutes la même aire, un terrain carré de 100 m de côté.
Jean a dessiné sa parcelle (grisée sur le dessin) en prenant des milieux des côtés.

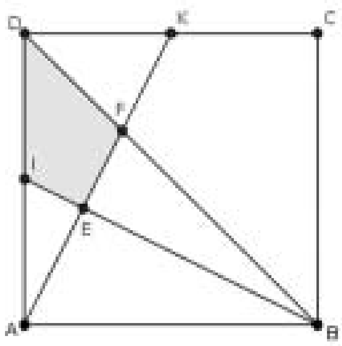
Combien y a-t-il d'enfants dans la famille Centaire ?
Quel est le périmètre de la parcelle de Jean ?
Terminez le partage de façon qu'il soit équitable.

Plusieurs solutions ont été évoquées dont une particulièrement simple sur un quadrillage.
Enfin on a présenté un puzzle articulé inspiré par ce découpage

Les problèmes de découpage de carrés sont nombreux et dans Panoramath 5 on trouve aussi

Un trapèze dans un carré
Alkawachi

ABCD est un carré de 10 cm de côté ; I et K sont les milieux respectifs des côtés AD et DC.
La droite AK coupe le segment IB en E et le segment DB en F.
Quelle est l'aire, arrondie à 0.001 près, du quadrilatère DIEF ?

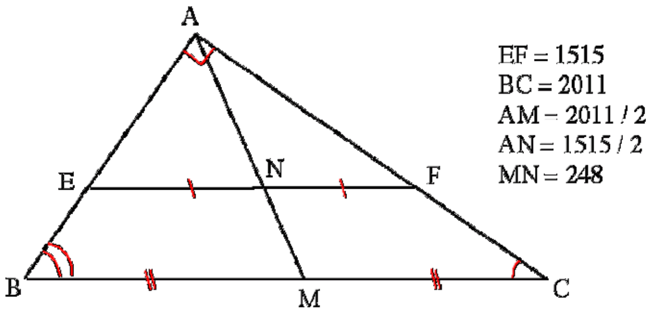


Avec ses solutions et des commentaires intéressants sur ces découpages

Le trapèze (Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques)

L'énoncé : Les deux bases d'un trapèze ont pour longueurs respectives 1515 cm et 2011 cm. Les deux angles adjacents à la grande base de ce trapèze ont pour somme 90°.
Quelle est la distance entre les milieux des deux bases ?

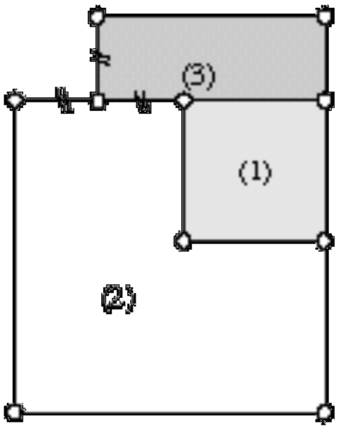
Analyse de la tâche et commentaires :
Ce problème s'adresse à des élèves de lycée, mais des élèves en fin de collège possèdent les outils pour le résoudre. De nombreuses personnes attaquent ce problème en utilisant la trigonométrie et … ont beaucoup de mal à en venir à bout.
L'idée très simple qui débloque la situation est de sortir du trapèze en prolongeant les deux côtés obliques jusqu'à leur intersection. Comme les angles adjacents la base du trapèze sont complémentaires, on obtient ainsi un triangle rectangle, et tout devient lumineux (voir la figure ci-dessous). Dans le triangle ABC rectangle en A, [AM] est une médiane, de longueur BC/2 = 1005,5. En utilisant le théorème de Thalès, on calcule AN, puis on en déduit MN.



Ce qui est remarquable dans ce problème est que la longueur MN est déterminée alors que les angles B et C sont variables. Une animation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique peut mettre en évidence cette propriété.

Les terrains du Pére Pétuel (Championnat des jeux mathématiques et logiques)

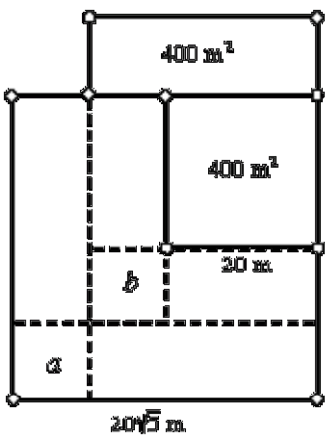
L'énoncé : Le Père Pétuel sait qu'il n'est pas éternel et il prépare sa succession en faisant l'inventaire de ses propriétés. Il possède trois terrains, numérotés (1), (2) et (3) sur le plan ci-dessous.

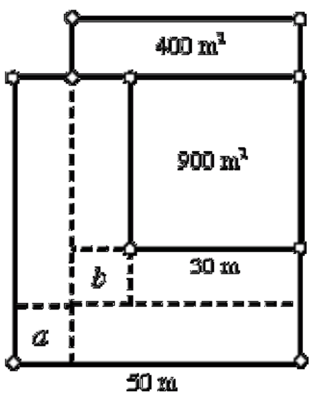


Le terrain (1) est un carré. Le terrain (2) est tel que (1) et (2) assemblés forment à eux deux un carré. Le terrain (3) est un rectangle. De plus, on sait que l'on a trois longueurs égales comme indiqué sur la figure.
Le terrain (2) a une aire égale à 1600 m^2.
Quelle est l'aire du terrain (3) ?

Connaissances et compétences :
- mise en équation d'un problème
- calcul littéral, identités remarquables

Commentaires :
Ce problème est accessible dès le début de la classe de seconde et ne nécessite que les connaissances acquises en fin de collège. Sa résolution dans la version « compétition » nécessite néanmoins une aptitude à la mise en équation d'un problème.
Un des intérêts de ce problème est que les données semblent très incomplètes (elles le sont effectivement pour déterminer toutes les dimensions de la figure), mais qu'elles suffisent pourtant pour pouvoir répondre à la question posée.
Notons que le problème peut également se résoudre sans équations, simplement par découpages, comme le montre la figure suivante où nous avons choisi deux exemples différents.



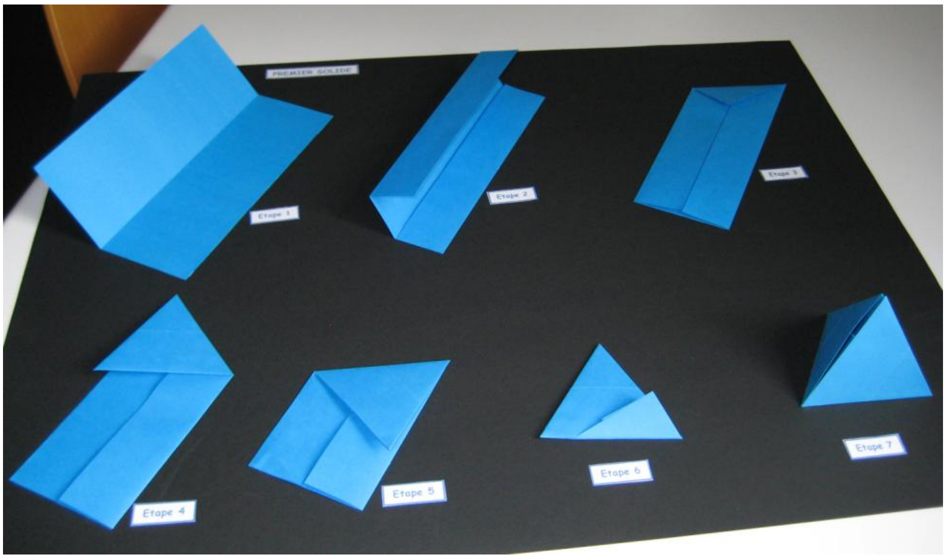


Pour terminer nous avons invité les participants à un exercice de pliage autour du tétraèdre et du tétraèdre tronqué . Une occasion d'évoquer des questions de volume et de proportionnalité

Tétraèdre et Tétraèdre tronqué

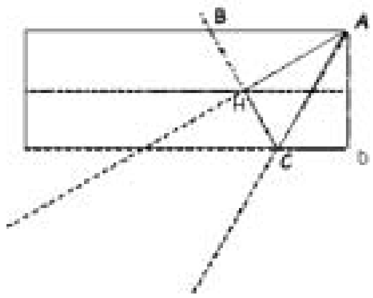
Rallye Mathématique de la Sarthe (finale 2008)

Premier solide



Aide : on pourra, par exemple, utiliser ce schéma

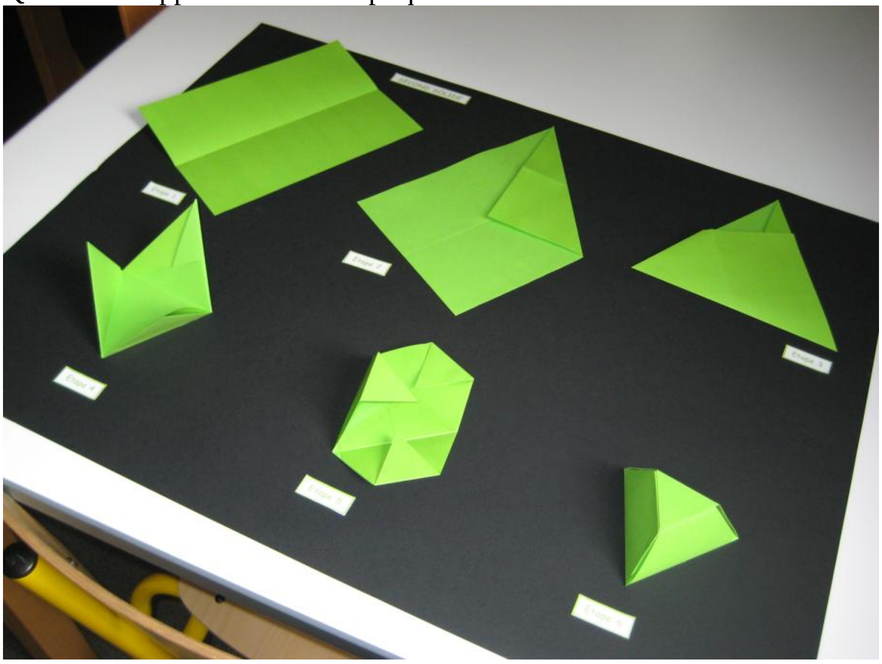
Terminez le pliage et formez le solide.
Quel est le nom précis de ce solide ? Justifiez



Second solide.

En observant vos plis pour aller jusqu'à l'étape 2, comparez avec l'étape 3 du pliage précédent : c'est le même pliage mais à une échelle différente ; laquelle ?
Terminez le pliage et formez le solide.
Quel nom peut-on donner à ce solide ?

On note V_2 le volume de ce second solide ; mais on ne demande pas de le calculer.
V_1
Quel est le rapport V1/V2? Expliquez comment on obtient ce résultat



Pour conclure cet atelier nous avons présenté en hommage à Bernard Novelli plusieurs de grilles à solution unique de jeux logiques (gratte ciel, antimorpion, voisins .. ;) pour souligner l'intérêt de ces jeux dans l 'apprentissage du raisonnement déductif .

Marie-José Pestel et Michel Criton