Christelle Kunc a proposé à ses élèves de collège un travail autour de la problématique de Kakeya qui s'énonce ainsi « Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ? » (voir coup de cœur de PLOT 39).

Christelle Kunc *est enseignante au collège George Chepfer à Villers-les-Nancy.*
christelle.kunc@ac-nancy-metz.fr

C'est à la suite de la lecture de l'excellent ouvrage numérique « *En cheminant avec Kakeya* » de V. Borelli et JL. Rullière de l'université de Lyon que l'idée m'est venue de lancer la problématique de Kakeya au collège. Bien sûr, je ne m'attendais pas à ce que mes élèves trouvent d'emblée la réponse, mais ce qui m'intéressait, c'était de les faire chercher. En effet, la question de départ est assez simple pour être comprise par des élèves de collège. J'avais l'année dernière des élèves de cinquième assez curieux, j'ai tout d'abord pensé à eux.

Je trouvais le calcul de l'aire du triangle de Reuleaux (voir figure sur le devoir) original et très accessible, à l'aide de la décomposition proposée par les auteurs : il suffisait de connaître l'aire d'un disque et celle d'un triangle ! La classe de 5ème me paraissait donc être un bon terrain expérimental.

Les trois figures (proposées en introduction de l'ouvrage) étaient le cercle, le triangle de Reuleaux et le triangle équilatéral, des figures que les élèves pouvaient dessiner et mesurer. Je suis partie dans l'idée de leur faire calculer ces trois aires afin de savoir laquelle convenait le mieux à la problématique de Kakeya.

Rappel : « En cheminant avec Kakeya », téléchargement gratuit sur http://math.univ-lyon1.fr/-borrelli/Kakeya.html

En préparant mon activité (pour le mois de mars), il m'est apparu que le temps de construction et de calcul nécessaires était plus adapté à un devoir maison qu'à un problème ouvert en classe. J'ai donc essayé de rédiger un DM (page 30). Cela m'a permis de réinvestir les propriétés angulaires à l'intérieur du triangle équilatéral (petite démonstration). Cela permettait aussi de trouver côte à côte les calculs d'aires travaillés séparément dans deux chapitres de grandeurs et mesures (octobre et janvier).

Mais l'intérêt de l'activité restant la recherche, il ne fallait pas tout donner tout de suite !
J'ai donc commencé par lancer le problème ouvert en classe avec un feutre et une aiguille sur le rétroprojecteur. Une fois la problématique comprise (il a fallu expliquer ce qu'était une surface et expliquer que l'aiguille pouvait glisser à l'intérieur, pas seulement tourner), la première proposition fut évidemment le disque. Puis les élèves ont essayé de construire un triangle de côté l'aiguille. Ils se sont vite rendu compte que « ça sortait du triangle ! » et en dessinant la surface ainsi construite, ils ont découvert le triangle de Reuleaux (non nommé alors). Puis j'ai relancé la question : « Peut-on faire mieux ? ». Dans une de mes deux classes, un élève a proposé le triangle équilatéral de hauteur l'aiguille, pour ne pas que « l'aiguille sorte » du triangle. En essayant de le construire, d'autres élèves ont proposé les glissements sur les côtés pour changer de sommet comme centre de rotation. Dans l'autre classe, l'idée n'est pas venue toute seule, alors j'ai dû préciser ma question « *Peut-on dessiner un triangle dans lequel on peut faire se retourner l'aiguille ? Quelles dimensions faudrait-il choisir pour qu'il soit le plus petit possible ?* ».

En 30 minutes dans mes deux classes, les trois surfaces étaient apparues. Il restait à calculer laquelle était la meilleure pour une aiguille de 10 cm de long (pratique pour les calculs et cohérent). J'ai alors distribué le DM aux élèves !

Le devoir a été bien réussi. Certains m'ont posé des questions pour la représentation graphique du triangle de Reuleaux en *Aide math*. Le mot « triangle » les gênait : ils voulaient dessiner un polygone, pas des arcs de cercles ! Il y a eu des erreurs dans les arrondis (j'avais choisi d'arrondir au mm² près !), ce qui a permis de retravailler les unités d'aires. Et nous avons revu le fait qu'en utilisant des longueurs mesurées sur leurs figures, les résultats ne pouvaient être des valeurs exactes !

À la remise des copies, en plus d'une rapide correction (devoir assez court), j'ai pris plaisir à leur faire découvrir la deltoïde chère à Kakeya. Je leur ai montré l'animation correspondante de l'aiguille qui tourne (facile à trouver sur Internet). Mais j'ai aussi fait une petite parenthèse sur le triangle de Reuleaux et le fait qu'on pouvait ainsi construire d'autres « polygones » de Reuleaux sur le même principe. J'ai également fait un peu d'histoire, en expliquant la genèse de cette figure, (connue au Moyen-Âge, rencontrée dans les manuscrits de De Vinci, …) et le fait qu'elle porte le nom d'un ingénieur allemand qui en a eu besoin pour faire évoluer des pièces mécaniques de moteur rotatif (et oui, les maths, cela sert à quelque chose !!!).
Avec le recul, je me dis que cette partie de la recherche aurait pu être faite par les élèves eux-mêmes et évaluée dans leur devoir maison ou faire l'objet d'un exposé.

En troisième

Je restais sur ma faim en ce qui concernait les calculs d'aires, puisqu'il avait été nécessaire aux 5ème de mesurer dans les triangles équilatéraux la hauteur ou le côté. Or pour des élèves de 3ème, ces calculs devaient être accessibles ! Comme je n'avais pas encore fait d'activités sur les calculs des valeurs exactes de cos 60°, sin 60°, j'ai trouvé que c'était une bonne idée de m'appuyer sur la problématique de Kakeya pour les faire calculer aux élèves. Ce devoir est en ligne sur le site de l'APMEP rubrique PLOT.

Des pistes pour le lycée

J'avais dans un même temps envisagé les prolongements possibles pour des élèves de seconde. L'idée de travailler sur les valeurs exactes semblait bonne aussi pour des secondes. Il est possible de faire comparer les valeurs exactes des trois aires en encadrant π au dixième.
De plus, il pourrait être intéressant de construire les courbes représentant les trois fonctions de a (trois paraboles), à la main ou avec un traceur de courbes de type *sinequanon*, et de faire réaliser une étude graphique (à partir de quelle valeur de a l'écart entre les aires est-il supérieur à … ?)
Évidemment, l'optimisation des aires de la famille des Reuleaux à hélice pourrait faire une superbe introduction pour le calcul de dérivées dans l'optimisation d'une aire et est à envisager pour des élèves à partir de la 1èreS. De même pour le lien entre aire et volume. L'intérêt principal du travail mathématique au lycée est de pouvoir s'intéresser à des familles de surfaces plutôt qu'à des surfaces définies comme au collège.

La suite de l'ouvrage est évidemment très riche mais ses applications sont accessibles seulement à des élèves de terminale, voire au-delà. Il reste donc encore de nombreuses possibilités d'exploiter cet ouvrage passionnant à lire !

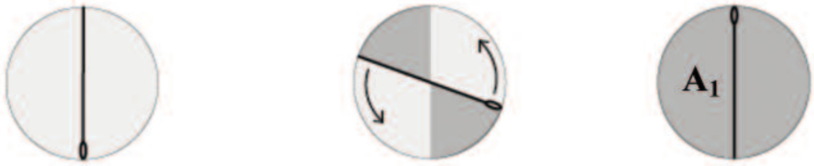
Roues en formes de « polygones de Reuleaux » à diamètres constants.

DM10 : La question de Kakeya 5ème

Cette question a été posée pour la 1ère fois au début du XXème siècle par le mathématicien japonais **Sôichi Kakeya** :

Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ?

- La première réponse qui vient à l'esprit est le disque dont l'aiguille serait le diamètre et qu'une simple rotation suffirait alors à renverser complètement.



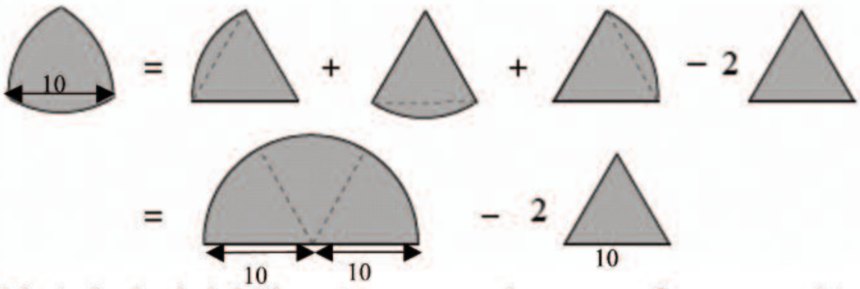
- Mais il existe d'autres façons de déplacer l'aiguille qui balaient de plus petites surfaces. Par exemple au lieu de faire tourner l'aiguille autour de son centre, on lui fait effectuer des rotations successives de 60° autour de ses extrémités.
Une figure se dessine alors d'elle-même : on l'appelle le **triangle de Reuleaux.**

- Ou alors on peut retourner une aiguille dans un triangle équilatéral dont **la hauteur** est de la même taille que l'aiguille.
Les dessins ci-dessous donnent l'idée du mouvement de l'aiguille à l'intérieur d'un tel triangle.

L'objectif de ce devoir consiste à trouver laquelle de ces 3 aires convient le mieux, donc est la plus petite.
On décide de choisir une longueur d'aiguille égale à **10 cm**.
On nommera $\mathbf{A_1}$ l'aire du disque de **diamètre** 10cm, A_2 l'aire du triangle de Reuleaux représenté ci-dessus et $\mathbf{A_3}$ l'aire du triangle équilatéral de **hauteur** 10 cm.

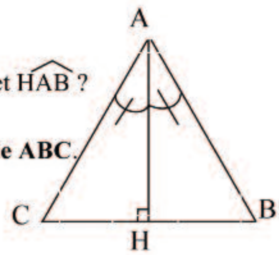
1) LE DISQUE : a) Représente la figure en dimensions réelles. b) Calcule A_1 au mm^2 près.

2) LE TRIANGLE DE REULEAUX :
a) Construis le triangle équilatéral de côté 10 cm, puis le triangle de Reuleaux correspondant.
b) En utilisant la décomposition suivante,



calcule une valeur approchée de l'aire A_2 du triangle de Reuleaux (tu mesureras sa hauteur sur ta figure au mm près).

3) LE TRIANGLE EQUILATERAL :



a) Que représente la droite (AH) pour le triangle ABC ? Que peux-tu déduire pour $\widehat{CAH}$ et $\widehat{HAB}$?
b) Calcule en justifiant les mesures des angles $\widehat{CAH}$ et $\widehat{HAB}$.
c) Construis le segment [AH] de 10 cm, puis en utilisant le b), **termine la construction de ABC.**
d) Mesure avec précision une valeur approchée au mm près de la longueur BC, puis calcule à l'aide de cette valeur mesurée l'aire A_3.

4) Parmi ces trois surfaces A_1, A_2 ou A_3 , quelle est celle qui répond le mieux à la question de Kakeya ?