Corrigé du brevet de technicien supérieur Groupement D 13 mai 2015

Durée : 2 heures

EXERCICE 1 11 points

Pharmacocinétique

Partie A : Étude du premier traitement

1. **a.** Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions qui s'écrivent :

$$f_0(t) = K\mathrm{e}^{-0,1t} \text{ où } K \text{ est un nombre réel.}$$

b. Dérivons h comme un produit : $h(t) = 2t\mathrm{e}^{-0,1t}$. Donc sa dérivée est :
$h'(t) = 2\mathrm{e}^{-0,1t} + 2t \times (-0,1)\mathrm{e}^{-0,1t} = \mathrm{e}^{-0,1t}(2-0,2t)$.
L'équation différentielle (E) donne :
$h'(t)+0,1h(t) = \mathrm{e}^{-0,1t}(2-0,2t)+0,1\times 2t\mathrm{e}^{-0,1t} = \mathrm{e}^{-0,1t}(2-0,2t+0,2t) = 2\mathrm{e}^{-0,1t}$.
h est bien une solution particulière de (E).

c. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions qui s'écrivent comme somme de l'équation particulière et des solutions de l'équation sans second membre soit :

$$f(t) = K\mathrm{e}^{-0,1t} + 2t\mathrm{e}^{-0,1t} \text{ où } K \text{ est un nombre réel.}$$

On a également : $f(t) = \mathrm{e}^{-0,1t}(K+2t)$.

d. La condition $f0) = 1$ entraîne $K = 1$.
La fonction cherchée est donc $f(t) = \mathrm{e}^{-0,1t}(1+2t)$.

2. **Étude d'une fonction**

a. On a $f(t) = \mathrm{e}^{-0,1t} + 2t\mathrm{e}^{-0,1t}$.
On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,1t} = \lim\limits_{t\to+\infty} t\mathrm{e}^{-0,1t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, ce qui démontre que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de plus l'infini.

b. On sait que quel que soit le réel t, $\mathrm{e}^{-0,1t} > 0$, donc le signe de $f'(t)$ est celui de $1,9-0,2t$.

- $1,9-0,2t > 0 \iff 1,9 > 0,2t \iff 9,5 > t$: $f'(t) > 0$ sur $]0\,;\,9,5[$;
- $1,9-0,2t < 0 \iff 1,9 < 0,2t \iff 9,5 < t$: $f'(t) < 0$ sur $]9,5\,;\,\infty[$.

$f(0) = 1$.
$f(9,5) = \mathrm{e}^{-0,95}(1+19) = 20\mathrm{e}^{-0,95} > 0$.
La fonction est donc croissante de 1 à $f(9,5) > 0$ et décroissante de $f(9,5)$ à 0.

3. **a.** D'après l'étude précédente la quantité de principe actif sera maximale au bout de 9,5 heures et égale à $f(9,5) = 20\mathrm{e}^{-0,95} \approx 7,73$.

b. L'équation $f(x) \geqslant 5$ ne pouvant pas se résoudre algébriquement, on peut utiliser la calculatrice.
Elle donne $f(2,81) \approx 4,998$ et $f(2,82) \approx 5,008$;
$f(21,95) \approx 4,999$
On trouve donc l'intervalle [2,82 ; 21,94] (en heures) soit de 2 h 49 min à 21 h 56 min.

c. On sait que la valeur moyenne de la fonction est égale à :
$V_m = \dfrac{1}{24-0}\displaystyle\int_0^{24} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{24} \times \left(210 - 690\mathrm{e}^{-2,4}\right) \approx 6,14$, soit environ 6,1 mg au dixième près.

Partie B : Étude statistique du second traitement

1. Il doit y avoir répétition du phénomène : augmentation très rapide du produit suivie d'une élimination par les reins : seule la figure 3 répond à ce double impératif.
2. **a.**

t_i	0	4	8	12	16	20	24
q_i	1,8	9,5	15,5	20,2	23,7	26,8	28,7
y_i	3,53	3,28	3,02	2,76	2,51	2,22	1,99

b. La calculatrice donne $y = -0,06t + 3,54$.

c. On sait que $y = \ln(36 - q)$; donc $\ln(36 - q) = -0,06t + 3,54$ ou $36 - q = \mathrm{e}^{-0,06t+3,54}$ et enfin $q = 36 - \mathrm{e}^{-0,06t+3,54}$.
Comme $\mathrm{e}^{-0,06t+3,54} = \mathrm{e}^{-0,06t} \times \mathrm{e}^{3,54} \approx 34,47$, on peut aussi écrire :
$q = 36 - 34,47\mathrm{e}^{-0,06t}$.

d. La limite de la fonction q est 36, donc l'état stationnaire sera atteint quand $q \geqslant 35$.
Donc $36 - 34,47\mathrm{e}^{-0,06t} \geqslant 35$ ou $1 \geqslant 34,47\mathrm{e}^{-0,06t}$ puis $\dfrac{1}{34,47} \geqslant \mathrm{e}^{-0,06t}$, puis en prenant le logarithme népérien :
$\ln\left(\dfrac{1}{14,47}\right) \geqslant -0,06t$ ou $0,06t \geqslant -\ln\left(\dfrac{1}{14,47}\right)$ et finalement
$t \geqslant \dfrac{1}{0,06}\left[-\ln\left(\dfrac{1}{14,47}\right)\right]$.
La calculatrice donne $t \geqslant 59$ h soit en fait moins de trois jours (72 h mais plus de deux jours).
L'état stationnaire est atteint en moins de trois jours (3j = 72h).

EXERCICE 2 :

Partie A : Étiquetage

1. Les évènements A et D étant indépendants,on a :
$P(A \cap D) = P(A) \times P(D) = .0,01 \times 0,03 = 0,0003$.
2. On a $P\left(\overline{A} \cap \overline{D}\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P\left(\overline{D}\right) = (1 - 0,01)(1 - 0,03) = 0,99 \times 0,97 = 0,9603$.

Partie B : Étude de la contenance

1. La calculatrice donne $P(57,9 \leqslant V \leqslant 558,1) \approx 0,99$.
La probabilité qu'un flacon ne soit pas conforme est donc $1 - 0,99 = 0,01$.
2. On a $h = 1,96 \times 0,04 = 0,0784 \approx 0,08$ au centième près.

Partie C : Test d'hypothèse

1. Les centres des classes sont 57,95 ; 57,99 ; 58,03 ; 58,07 ; 58,09 ; 58,11.
D'où $\dfrac{2 \times 57,95 + 10 \times 57,99 + 39 \times 58,03 + 21 \times 58,07 + 8 \times 58,11}{80} \approx 58,041$ et d'autre part grâce à la calculatrice $s \approx 0,036$.

2. **a.** D'après le cours c'est l'intervalle $L = \left[58 - 1,96 \times \dfrac{0,04}{\sqrt{80}}\ ;\ 58 + 1,96 \times \dfrac{0,04}{\sqrt{80}}\right]$.

   b. On prélève un échantillon de 80 flacons et on calcule sa moyenne $\overline{v}$.

   - si $\overline{v} \in L \approx [57,991\ ;\ 58,009]$ on accepte H_0 et on rejette H_1 ;
   - si $\overline{v} \notin L \approx [57,991\ ;\ 58,009]$ on rejette H_0 et on accepte H_1 ; le contrôle rejette cette livraison.

3. $\overline{v} \approx 58,042$ et $L = [57,99\ ;\ 58,01]$ donc on rejette H_0 et on accepte H_1 au seuil de 5 %.

   On conclut, au seuil de 5 %, que le service de contrôle n'acceptera pas la livraison.