∽ Corrigé du concours contrôleur des douanes ∾
session 2022

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :

— **Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.**

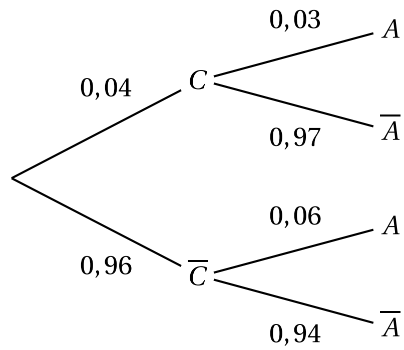
— **Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.**

Exercice 1

1. Enlever 5 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{5}{100} = 1 - 0,05 = 0,95$.
   mais chaque année on ajoute 200 tonnes de nouveaux déchets. On a donc à partir de $u_0 = 40\,000$:
   - $u_1 = u_0 \times 0,95 + 200 = 40\,000 \times 0,95 + 200 = 38\,000 + 200 = 38\,200$;
   - $u_2 = u_1 \times 0,95 + 200 = 38\,200 \times 0,95 + 200 = 36\,290 + 200 = 36\,490$.
2. On a vu que d'une année sur l'autre on multiplie la quantité de déchets par 0,95 et on ajoute ensuite 200, soit pour tout naturel n, $\quad u_{n+1} = 0,95u_n + 200$.
3. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad s_n = u_n - 4\,000$, donc
   $s_{n+1} = u_{n+1} - 4\,000 = 0,95u_n + 200 - 4\,000 = 0,95u_n - 3\,800 = 0,95\left(u_n - \dfrac{3\,800}{0,95}\right) =$
   $0,95\,(u_n - 4\,000)$, soit finalement :
   $$s_{n+1} = 0,95s_n, \quad n \in \mathbb{N}$$
   Cette égalité montre que la suite (s_n) est une suite géométrique de raison 0,95, de premier terme $s_0 = u_0 - 4\,000 = 40\,000 - 4\,000 = 36\,000$.
4. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = s_0 \times 0,95^n = 36\,000 \times 0,95^n$.
   Or $s_n = u_n - 4\,000 \iff u_n = s_n + 4\,000 = 4\,000 + 36\,000 \times 0,95^n$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
5. Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$ et par conséquent
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 36\,000 \times 0,95^n = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 4\,000$.
   À terme la quantité de déchets va descendre à 4 000 tonnes.
6. Il faut résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $u_n < 30\,000$, soit :
   $4\,000 + 36\,000 \times 0,95^n < 30\,000$ ou encore
   $36\,000 \times 0,95^n < 26\,000$ ou $0,95^n < \dfrac{26}{36}$ ou $0,95^n < \dfrac{13}{18}$, soit d'après l'indication de l'énoncé :
   $0,95^n < 0,722$.
   La calculatrice donne $0,95^6 \approx 0,735$ et $0,95^7 \approx 0,698 < 0,722$.
   L'entreprise respectera ses engagement en $2010 + 7 = 2017$.

Exercice 2

1. Avec les données de l'énoncé on dresse l'arbre de probabilités pondéré suivant :



2. On a donc :

- $p(C) = 0,04$;
- $p_C(A) = 0,03$;
- $p_C\left(\overline{A}\right) = 1 - 0,03 = 0,97$.

3. **a.** Il faut trouver $p(A \cap C)$:
$p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C) = 0,04 \times 0,03 = 0,001\,2$.

b. $p\left(A \cap \overline{C}\right) = p(A) \times p_A\left(\overline{C}\right) = [1 - p(C)]\left(1 - p_{\overline{C}}\left(\overline{A}\right)\right) = (1 - 0,04) \times (1 - 0,94) = 0,96 \times 0,06 = 0,057\,6$.

c. D'après la loi des probabilités totales :
$p(A) = p(A \cap C) + p\left(A \cap \overline{C}\right) = 0,001\,2 + 0,057\,6 = 0,058\,8$.

d. Il faut trouver $p_A(C) = \dfrac{p(A \cap C)}{p(A)} = \dfrac{0,001\,2}{0,058\,8} = \dfrac{12}{588} = \dfrac{6}{294} = \dfrac{3}{147} = \dfrac{1}{49}$.

Exercice 3

Sur $\mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{3}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$.

Partie A

1. f est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas : elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$, avec $u(x) = 1 + \mathrm{e}^{-2x}$ et donc $u'(x) = 3 \times \left(-2\mathrm{e}^{-2x}\right)$, on a
$f'(x) = -\dfrac{-6\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right)^2} = \dfrac{6\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right)^2}$.
On sait que quel que soit $X \in \mathbb{R}$, $\ \mathrm{e}^X > 0$ et que d'autre part $\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right)^2 > 0$, donc $f'(x)$ quotient de deux termes supérieurs à zéro est supérieur à zéro.
Conclusion : comme $f'(x) > 0$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 1 + \mathrm{e}^{-2x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$: ceci signifie que la droite Δ d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de plus l'infini.

Partie B

h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x) = 3 - \dfrac{3}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3 - 3 - 3\mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$.

1. D'après le graphique de l'énoncé et la partie A, la fonction f est strictement croissante de 0 à 3. On a donc :
$0 \leqslant f(x) \leqslant 3$ ou $-3 \leqslant -f(x) \leqslant 0$ ou en ajoutant 3 à chaque membre :
$0 \leqslant 3 - f(x) \leqslant 3$, soit $0 \leqslant h(x) \leqslant 3$: en particulier h est donc positive sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction H est une fonction composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: elle donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$H'(x) = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{-2\text{e}^{-2x}}{\left(1+\text{e}^{-2x}\right)} = \dfrac{3\text{e}^{-2x}}{\left(1+\text{e}^{-2x}\right)} = h(x)$.
Donc $H'(x) = h(x)$ montre que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. Comme a est supérieur à zéro, l'intégrale de la fonction h positive sur l'intervalle $[1\,;\,a]$ est égale en unité d'aire à l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de h sur l'intervalle $[1\,;\,a]$, les deux droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ et la droite Δ.

4. D'après la question 2., on a $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\text{d}x = [H(x)]_0^a = H(a) - H(0) =$
$-\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\text{e}^{-2a}\right) - \left[-\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\text{e}^{-2\times 0}\right)\right] = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\text{e}^{-2a}\right) + \dfrac{3}{2}\ln 2 =$
$\dfrac{3}{2}\left[\ln 2 - \ln\left(1+\text{e}^{-2a}\right)\right] = \dfrac{3}{2}\ln\dfrac{2}{1+\text{e}^{-2a}}$. (d'après $\ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b}$.)

5. D'après la question précédente l'aire en unité d'aire de D est égale à :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\text{d}x \approx 1{,}039\,7$.
Rem. On a $\displaystyle\int_0^4 h(x)\,\text{d}x \approx 1{,}039\,2$.

Exercice 4

1. D'après l'énoncé $\overrightarrow{\text{AB}} = 6\overrightarrow{\text{AI}}$, donc B$(6\,;0\,;0)$, et de même D$(0\,;4\,;0)$, E$(0\,;0\,;2)$ et G$(6\,;4\,;2)$.

2. Avec $\overrightarrow{\text{IJ}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{IJ}} = -2+2+0 = 0$.

De même avec $\overrightarrow{\text{IG}}\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{IG}} = 10+8-18 = 0$.

Les deux vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{IG}}$ ne sont pas colinéaires.
Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colin"aires du plan IJG est normal à ce plan.

3. D'après le résultat précédent on sait que :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{IJG}) \iff 2x+2y-9z = d,\ d \in \mathbb{R}.$$

En particulier $I(1\,;\,0\,;\,0) \in (\text{IJG}) \iff 2+0-0 = d \iff d = 2$.

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{IJG}) \iff 2x+2y-9z = 2.$$

4. On cherche deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (BCG) : par exemple $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BG}}\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$.

Soit $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{BG}}$. On a donc :

$\left\{\begin{array}{l c l}\overrightarrow{\text{BC}}\cdot\overrightarrow{n} & = & 0\\ \overrightarrow{\text{BG}}\cdot\overrightarrow{n} & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}4y & = & 0\\ 4y+2z & = & 0\end{array}\right.$ $\Rightarrow y=0$ puis $z=0$. Comme B, C, G ont pour abscisse 6, on a donc :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{BCG}) \iff x=6.$$

Rem. On peut voir que le plan (BCG) est un plan vertical, que tous les points de ce plan ont pour abscisse 6, donc que l'une de ses équations est $x-6=0$.