∽ Concours contrôleur des douanes ∽
Branche surveillance –session 2021

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

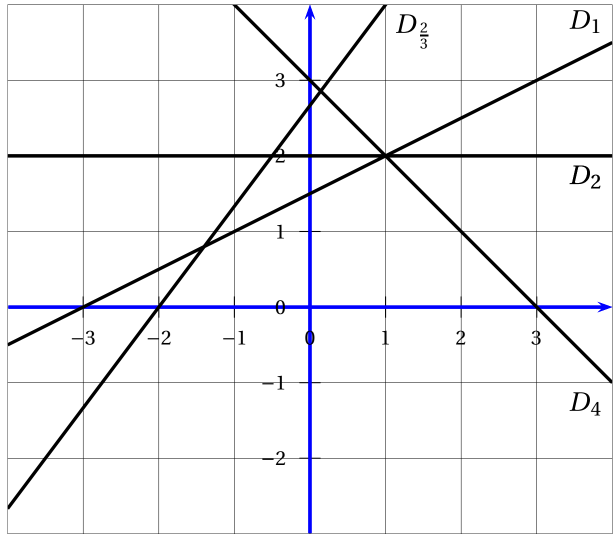
Remarque préliminaire :
– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

Soit les points A(1 ; 2) et $M(-1\ ;\ m)$, $m \in \mathbb{R}$.

1. On a A(1 ; 2)$\in D_m \iff 2 = 1\alpha + \beta$ et
$M(-1\ ;\ m) \in D_m \iff m = -\alpha + \beta$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$.
Soit $\left\{\begin{array}{rcl} 2 & = & 1\alpha + \beta \\ m & = & -\alpha + \beta \end{array}\right. \Rightarrow$ (par somme) $m + 2 = 2\beta \iff \beta = \dfrac{m+2}{2}$.
En remplaçant β dans la première par cette valeur :
$\alpha = 2 - \beta = 2 - \left(\dfrac{m+2}{2}\right) = \dfrac{2-m}{2}$.
On a donc $X(x\ ;\ y) \in D_m \iff y = \dfrac{2-m}{2}x + \dfrac{m+2}{2}$.
On a $X(x\ ;\ y) \in D_1 \iff y = \dfrac{2-1}{2}x + \dfrac{1+2}{2}$, soit $X(x\ ;\ y) \in D_1 \iff y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$;
On a $X(x\ ;\ y) \in D_2 \iff y = \dfrac{2-2}{2}x + \dfrac{2+2}{2}$, soit $X(x\ ;\ y) \in D_2 \iff y = 2$;
2. Le coefficient directeur de D_m est $\dfrac{2-m}{2}$.
3. Déterminer m tel que :
   - B(2 ; 1) $\in D_m \iff 1 = \dfrac{2-m}{2} \times 2 + \dfrac{m+2}{2} \iff 2 = 2(2-m) + m + 2 \iff 0 = 4 - m \iff m = 4$ (équation de $D_4 : y = -x + 3$)
   - Le coefficient directeur est nul, soit $\dfrac{2-m}{2} = 0 \iff 2 - m = 0 \iff 2 = m$. (équation de $D_2 : y = 2$.)
   - C$(-2\ ;\ 0) \in D_m \iff 0 = \dfrac{2-m}{2} \times (-2) + \dfrac{m+2}{2} \iff m - 2) + \dfrac{m+2}{2} = 0 \iff 2m - 4 + m + 2 = 0 \iff 3m - 2 = 0 \iff m = \dfrac{2}{3}$. (équation de $D_{\frac{2}{3}} : y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{8}{3}$).
   - D_m coupe l'axe Oy en un point D d'ordonnée 3.

   D(0 ; 3) $\in D_m \iff 3 = \dfrac{2-m}{2} \times 0 + \dfrac{m+2}{2} \iff 6 = m + 2 \iff m = 4$. (équation de $D_4 : y = -x + 3$).



4. A(1 ; 2) $\in D_m \iff 2 = \dfrac{2-m}{2} + \dfrac{2+m}{2} \iff 4 = 2 - m + 2 + m \iff 4 = 4$ qui est vraie.
Conclusion : toutes les droites D_m contiennent A. La réponse est oui.

$$\Delta_m : \quad (m+7)x + (m+3)y - 2m - 9 = 0$$

5. On a $(m+7)x+(m+3)y-2m-9=0 \iff mx+7x+my+3y-2m-9=0 \iff m(x+y-2)+7x+3y-9=0$: cette égalité est vraie si :

$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-2 & = & 0\\ 7x+3y-9 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -3x-3y+6 & = & 0\\ 7x+3y-9 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow$ (par somme) $4x-3=0 \iff x = \dfrac{3}{4}$, d'où en utilisant la première équation : $y = 2 - x = 2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$.

Ceci signifie que toutes les droites Δ_m contiennent le point $\mathrm{E}\left(\dfrac{3}{4}\,;\,\dfrac{5}{4}\right)$.

6. $M(x\,;\,y) \in \Delta_m \iff y = -\dfrac{m+7}{m+3}x + \dfrac{9}{m+3}$. Donc :

•D_m et Δ_m sont parallèles si leurs coefficients directeurs sont égaus c'est-à-dire si :

$\dfrac{2-m}{2} = -\dfrac{m+7}{m+3} \iff (2-m)(m+3) = -2(m+7) \iff 2m+6-m^2-3m = -2m-14 \iff m^2 - m - 20 = 0$

Avec $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-20) = 1 + 80 = 81 = 9^2 > 0$.

L'équation a deux solutions $m_1 = \dfrac{1+9}{2} = 5$ et $\dfrac{1-9}{2} = -4$.

Conclusion D_5 et Δ_5 sont parallèles ; D_{-4} et Δ_{-4} sont parallèles.

En dehors de ces deux valeurs $m = 5$ ou $m = -4$ les droites D_m et Δ_m sont sécantes.

Exercice 2

1. • On a $p\left(\overline{A}\right) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{125}{216}$;

• On en déduit que $p(A) = 1 - p\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{125}{216} = \dfrac{91}{216}$.

• $\overline{B}$ désigne l'évènement : « Les trois résultats sont différents ». Avec comme premier tirage 1 on a les issues favorables :

123, 124, 125, 126, 132, 134, 135, 136, 142, 143, 145, 146, 152, 153, 154, 156,162 163, 164, 165, autant d'issues avec les cinq autres chiffres, soit finalement $p\left(\overline{B}\right) = \dfrac{6 \times 20}{6^3} = \dfrac{120}{216} = \dfrac{15}{27} = \dfrac{5}{9}$.

- D'où $p(B) = 1 - p\left(\overline{B}\right) = \dfrac{4}{9}$.

2. $\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$ désigne l'évènement : « les trois résultats sont différents et il n'y a pas de 6.
En premier on a 5 possibilités, en deuxième 4 possibilités et en dernier 3 possibilités, soit $5 \times 4 \times 3 = 60$ tirages favorables et une probabilité :
$p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \dfrac{60}{216} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

3. En remarquant que : $\overline{A} = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$, déduire de 2. la probabilité de l'évènement $\left(\overline{A} \cap B\right)$.

4. Par une méthode semblable, calculer la probabilité de l'évènement $A \cap B$.

5. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.

Exercice 3

Partie A

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x.$$

1. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 1 + \mathrm{e}^{-x} = 1$ et par composition $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) = \ln 1 = 0$.
Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$, on a finalement $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. D'après la question précédente $f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$ et on a vu que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) = 0$.
Ceci montre géométriquement que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{3}x$ est asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de plus l'infini.

c. On étudie la fonction différence d définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$d(x) = f(x) - \frac{1}{3}x = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Or on sait que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, d'où en ajoutant 1 : $1 + \mathrm{e}^{-x} > 1$ et $\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) > \ln 1 = 0$.
Autrement dit quel que soit le réel x, $d(x) > 0$, ce qui signifie géométriquement que la courbe (C) est au dessus de la droite (D).

d. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^{-x}\right) + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x}\right) + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \ln\left(\mathrm{e}^x\right) + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - x + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \dfrac{2}{3}x$.

e. On a $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x + 1 = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) = \ln 1 = 0$.
Comme $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{3}x = -\infty$, on a par somme de limites :
$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. On pose $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-x}$, donc $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, puis comme $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ et $\left(\dfrac{1}{3}x\right)' = \dfrac{1}{3}$, la dérivée de la somme étant égale à la somme des dérivées de chaque terme :

$f'(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \dfrac{1}{3}$ soit en multipliant chaque terme du quotient par e^{x} :

$f'(x) = \dfrac{-1}{\mathrm{e}^{x}+1} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{-3+1+\mathrm{e}^{x}}{3\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}-2}{3\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}$.

Comme $\mathrm{e}^{x} > 0$, quel que soit le réel x, on a $\mathrm{e}^{x}+1 > 1 > 0$, donc le dénominateur étant supérieur à zéro, le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur, soit :

- $\mathrm{e}^{x}-2 > 0 \iff \mathrm{e}^{x} > 2$ et par croissance de la fonction logarithme népérien $x > \ln 2$: la fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[\ln 2\,;\,+\infty[$. De même
- $\mathrm{e}^{x}-2 < 0 \iff \mathrm{e}^{x} < 2$ et par croissance de la fonction logarithme népérien $x < \ln 2$: la fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $[-\infty\,;\,\ln 2[$.
- $f(\ln 2) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-\ln 2}\right)+\dfrac{1}{3}\ln 2 = \ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}}\right)+\dfrac{1}{3}\ln 2 = \ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{3}\ln 2 = \ln\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}\ln 2 = \ln 3 - \ln 2 + \dfrac{1}{3}\ln 2 = \ln 3 - \dfrac{2}{3}\ln 2 \approx 0,637$.

$f(\ln 2)$est le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).
On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1. On sait que le coefficient directeur de (T) est égal au nombre dérivé $f'(0) = \dfrac{\mathrm{e}^{0}-2}{3\left(\mathrm{e}^{0}+1\right)} = \dfrac{1-2}{3\times(1+1)} = -\dfrac{1}{6}$.

Pour construire cette tangente on part du point $(0\,;\,f(0))$ et on se déplace de 6 unités vers la droite et de 1 unité vers le bas (ou 3 à droite et 0,5 vers le bas).

2. On a $\mathrm{M}\left(x\,;\,\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)+\dfrac{1}{3}x\right)$ et $\mathrm{N}\left(-x\,;\,\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)-\dfrac{1}{3}x\right)$.

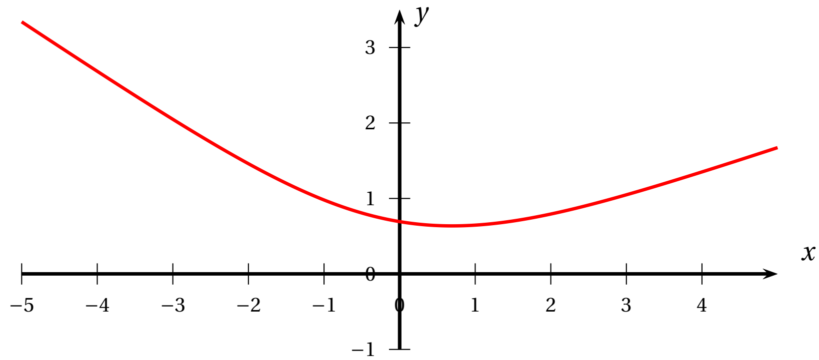
Donc le coefficient directeur de la droite (MN) est égal à (pour $x \neq 0$:

$c = \dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)-\dfrac{1}{3}x-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)-\dfrac{1}{3}x}{-x-x} = \dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)-\dfrac{2}{3}x}{-2x}$.

$c = \dfrac{\ln\dfrac{1+\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{2}{3}x}{-2x} = \dfrac{\ln\dfrac{1+\mathrm{e}^{x}}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}}-\dfrac{2}{3}x}{-2x} = \dfrac{\ln\dfrac{1+\mathrm{e}^{x}}{\frac{\mathrm{e}^{x}+1}{\mathrm{e}^{x}}}-\dfrac{2}{3}x}{-2x} = \dfrac{\ln\dfrac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}}-\dfrac{2}{3}x}{-2x}$ après simplification par $\mathrm{e}^{x}+1 \neq 0$. Enfin

$c = \dfrac{\ln\mathrm{e}^{x}-\dfrac{2}{3}x}{-2x} = \dfrac{x-\dfrac{2}{3}x}{-2x} = \dfrac{\dfrac{1}{3}x}{-2x} = -\dfrac{1}{6} = f'(0)$.

Cette égalité montre que pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, la droite (MN) est parallèle à la tangente au point de la courbe d'abscisse zéro.



Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + x\mathrm{e}^{-x}\right)$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe C est représentée ci-après.

Partie A

1. On a $x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ et on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + x\mathrm{e}^{-x}\right) = \ln 1 = 0$.
2. La fonction f est une fonction composée de fonctions dérivables $x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ et $x \longmapsto \ln x$ pour $x > 0$: f est donc dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}}{1 + x\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1-x)}{1 + x\mathrm{e}^{-x}}$.
   Comme $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$, $x\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.
3.
   - $1 - x > 0 \iff x < 1$, donc sur l'intervalle $[0; 1[$, $f'(x) > 0$, et f est strictement croissante sur cet intervalle;
   - $1 - x < 0 \iff x > 1$, donc sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$, et f est strictement décroissante sur cet intervalle;
   - $1 - x = 0 \iff x = 1$, donc $f'(1) = 0$; comme $f(1) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-1}\right) \approx 0,313$. Le point de coordonnées $\left(1 ; \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-1}\right)\right)$ est le maximum de la fonction f.

Partie B

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $A(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$.
On se propose de majorer $A(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

Première méthode

1. Voir ci-dessous l'exemple $\mathscr{A}(2,5)$.
2. On a vu que f a un maximum sur $\mathbb{R}_+$. Donc : quel que soit $x > 0$,
   $f(x) \leqslant f(1) \Longrightarrow \displaystyle\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\lambda f(1)\,\mathrm{d}x$, soit
   $A(\lambda) \leqslant f(1)\displaystyle\int_0^\lambda \mathrm{d}x$ ou encore
   $A(\lambda) \leqslant f(1) \times \lambda$.

Seconde méthode

1. Soit G la fonction définie pour x réel positif par :
   $G(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$: produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ cette fonction est dérivable et sur cet intervalle :
   $G'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - [-(x+1)\mathrm{e}^{-x}] = -\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(-1+x+1) = x\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
   Conclusion $F(x)$ est une primitive de $x\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
   On a donc $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-(x+1)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\lambda} = 1-(\lambda+1)\mathrm{e}^{-\lambda}$.
2. En utilisant l'indication $\ln(1+u) \leqslant u$ avec $u = x\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$, on a
   $\ln\left(1+x\mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \ln\left(x\mathrm{e}^{-x}\right)$, donc en intégrant entre 0 et λ :
   $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant \displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1-(\lambda+1)\mathrm{e}^{-\lambda}$, donc finalement
   $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant 1-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}$.

Application numérique

- Première majoration :

$\mathscr{A}(5) \leqslant 5f(1) \approx 1{,}566$.

- Seconde majoration :

$\mathscr{A}(5) \leqslant 1-5\mathrm{e}^{-5}-\mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}960$.

Cette majoration est meilleurs que la première (la calculatrice donne $\mathscr{A}(5) \approx 0{,}855$.)