∾ Corrigé du concours contrôleur des douanes session 2012 ∾

Concours : surveillance et aéronautique : pilote d'avion

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Exercice 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2^{\sin^2 x} - \cos x.$$

1.

- $f0) = 2^{\sin^2(0)} - \cos 0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$;
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^1 - 0 = 2$;
- $f(\pi) = 2^{(-1)^2} - (-1) = 2^{(-1)^2} - 0 = 2^1 = 2$;
- $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2^1 - 0 = 2$;
- $f(2\pi) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \pi, \quad , x = \frac{3\pi}{2}, \quad x = 2\pi.$$

2. Comme $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, f s'annule uniquement si $2^{\sin^2 x} = 1$ ou $2^{\sin^2 x} = -1$.
Or • $2^{\sin^2 x} = 1 \iff \sin^2 x = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2\pi$.
On retrouve les deux solutions de la première question ;
• $2^{\sin^2 x} = -1$: ceci n'est pas possible car $2^{\sin^2 x} \geqslant 1$ et $-1 < 0$.
Donc sur l'intervalle $]0\,;\,2\pi[$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

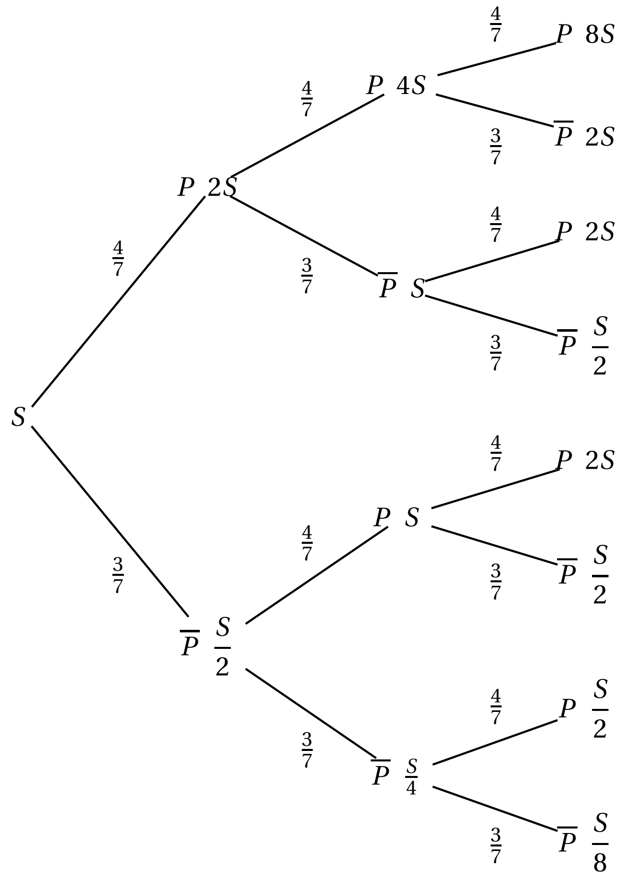
3. Comme $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, on en déduit que la fonction f est $2\pi-$périodique.
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les réels de la forme $0 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

1. D'après l'énoncé on a $p_i = k \times i$, avec $k \in \mathbb{R}$.
Or on a $p_2 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \iff k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6x = 1 \iff 21k = 1 \iff k = \dfrac{1}{21}$.
On a donc pour $1 \leqslant i \leqslant 6$: $p_i = \dfrac{i}{21}$.

2. On a $p(\text{impair} = p_1 + p_3 + p_5 = \dfrac{1}{21} + \dfrac{3}{21} + \dfrac{5}{21} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$.
On a donc $p(\text{pair}) = 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$.

a. Sophie dispose au départ d'une somme S : voici l'arbre pondéré donnant les gains (ou pertes) à chaque lancer :



b. On a $p(8S) = \left(\dfrac{4}{7}\right)^3 = \dfrac{64}{343}$;

$p(2S) = 3 \times \left(\dfrac{4}{7}\right)^2 \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{144}{343}$;

$p\left(\dfrac{S}{2}\right) = 3 \times \left(\dfrac{4}{7}\right) \times \left(\dfrac{3}{7}\right)^2 = \dfrac{108}{343}$;

$p\left(\dfrac{S}{8}\right) = \left(\dfrac{3}{7}\right)^3 = \dfrac{27}{343}$.

c. La probabilité de gagner est égale à :

$p(8S) + p(2S) = \dfrac{64}{343} + \dfrac{144}{343} = \dfrac{208}{343} \approx 0,61$.

61 % de chances de gagner sur un grand nombre de parties donc 39 % de chances de perdre ; le jeu est en faveur de Sophie.

d. Trois faces portant un nombre pair donc 3 faces portant un nombre impair, donc $p(\text{pair}) = p(\text{impair}) = \dfrac{1}{2} = 0,5$.

Sophie aura donc 1 chance sur 2 de gagner et 1 chance sur 2 de perdre : le jeu sera équilibré.

Exercice 3

En vous aidant des propriétés de la fonction exponentielle, répondez en détaillant vos calculs aux questions suivantes :

1. Si $x > 0$, $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x \iff \mathrm{e}\sqrt{x}\ln x = \mathrm{e}^{x\ln x}$ si $x > 0$ et par croissance de la fonction logarithme népérien $\sqrt{x}\ln x = x\ln\sqrt{x}$ ou $\sqrt{x}\ln x = \dfrac{1}{2}x\ln x \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4$.

$S = \{4\}$. (Effectivement : $4^2 = 2^4$).

2. Calculez la limite quand $x \to +\infty$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}?$$

$\dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right)^x}{\mathrm{e}^{x^x \ln x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{x\left(\ln\left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right)\right)}}{\mathrm{e}^{x^x \ln x}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^x} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Or $\ln\left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right) = x\ln x$, donc le quotient est égal à : $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2\ln x}}{\mathrm{e}^{x^x \ln x}}$

3. Quelle est la solution – si elle existe – de l'équation

$$x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

$x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = \sin^2 x + \cos^2 x \iff \mathrm{e}^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\ln x} = 1 \iff \mathrm{e}^{\ln(\ln x)} = 1$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :

$\ln(\ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \iff x = \mathrm{e}$. $S = \{\mathrm{e}\}$

Exercice 4

Soit la fonction réelle

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

Partie A

1. $\ln x$ existe sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et dans ce cas le dénominateur est non nul : $\mathcal{D}_f =]0~;~+\infty[$.
2. f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$, le dénominateur étant non nul.
   Sur cet ensemble : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. $\mathcal{D}_{f'} =]0~;~+\infty[$.
3. Le dénominateur étant positif le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $1 - \ln x$:
   - $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \mathrm{e} > x \iff x < \mathrm{e}$.
   $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0~;~\mathrm{e}[$, donc f est croissante sur cet intervalle.
   - $1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff \mathrm{e} < x \iff x > \mathrm{e}$.
   $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $]\mathrm{e}~;~+\infty[$, donc f est décroissante sur cet intervalle.
   - $1 - \ln x = 0 \iff x = \mathrm{e}$: $f(\mathrm{e}) = \frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$ est le maximum de f sur $]0~;~+\infty[$.

Partie B

On considère l'équation

$$n^p = p^n,$$

où p et n sont des entiers naturels.

1. En utilisant la définition $a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$, on a :
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $n^p = p^n \iff \mathrm{e}^{p\ln n} = \mathrm{e}^{n\ln p} \iff p\ln n = n\ln p$ (par croissance de la fonction exponentielle) ou encore $\dfrac{\ln n}{n} = \dfrac{\ln p}{p}$.
   $\ln(4) = \ln 2^2 = 2\ln 2$.
2. Le résultat précédent montre qu'il faut trouver deux naturels ayant la même image par la fonction f : $f(n) = f(p)$.
   Le tableau de variations de f :

x	0	1	2	e	3	4	$+\infty$
f	‖	0 ↗		e^{-1}		↘	0

   montre que pour tout réel $a \in \left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right[$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires deux réels $\alpha \in]0\,;\,\mathrm{e}[$ et $\beta \in]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ tels que $f(\alpha) = f(\beta) = a$.
   Or on cherche des solutions naturelles : entre 0 et e il n'y a que 1 qui est exclu car $f(1) = 0$ et il n'existe pas de naturel supérieur à e tel son image soit égale à 0.
   Il ne reste donc que 2 et $f(2) = \dfrac{\ln 2}{2}$.
   Or on a vu que $\ln 4 = 2\ln 2$, donc $f(4) = \dfrac{\ln 4}{4} = \dfrac{2\ln 2}{2\times} = \dfrac{\ln 2}{2}$.
   Conclusion les solutions sont $(2\,;4)$ ou $(4\,;2)$. Effectivement $2^4 = 4^2$.

Exercice 5

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 2, \quad v_n = \frac{2}{u_n} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. *Initialisation* :
   • $u_0 = 2$, donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
   • $v_0 = \dfrac{2}{2} = 1$, donc $1 \leqslant v_0 \leqslant 2$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
   Hérédité :
   • On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2 \quad (1) \iff \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{u_0} \leqslant \dfrac{1}{1} \iff$
   $1 \leqslant \dfrac{2}{u_n} \leqslant 2 \iff 1 \leqslant v_n \leqslant 2 \quad (2)$.
   En sommant les encadrements de nombres positifs (1) et (2), on obtient :
   $2 \leqslant u_n + v_n \leqslant 4 \iff 1 \leqslant \dfrac{u_n + v_n}{2} \leqslant 2$, soit finalement $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
   • On suppose de même que pour $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$ mais alors comme précédemment on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ puis d'après le point précédent $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ et en passant aux inverses puis en multipliant par 2, on obtient $1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$.
   Conclusion : les encadrements sont vrais au rang 0 et s'ils sont vrais au rang n, ils le sont aussi au rang $n+1$.
   D'après le principe de récurrence quel que soit le naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}^2 - 2}{u_{n+1}} = \dfrac{\frac{(u_n+v_n)^2}{4} - 2}{\frac{u_n+v_n}{2}}$.

En remplaçant 2 par $u_n v_n$ on obtient

$u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n+v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n+v_n)} = \dfrac{u+_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n - 4u_n v_n}{2(u_n+v_n)} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n v_n)}$.

3. L'égalité précédente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1}$ est positif comme quotient de deux termes positifs.

On sait que $u_0 > v_0$ et on montre facilement par récurrence de $u_n - v_n > 0$ que $u_{n+1} - v_{n+1} > 0$.

Donc $u_n > v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

4. • $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2}$: or on vient de voir que $u_n > v_n \iff u_n - v_n > 0 \iff v_n - u_n < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

• $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{u_{n+1}} - \dfrac{2}{u_n} = \dfrac{2(u_n - u_{n+1})}{u_n u_{n+1}}$.

Or on vient de démontrer que $u_n - u_{n+1} > 0$ et on sait que $u_n u_{n+1} > 0$, donc finalement $v_{n+1} - v_n > 0$ ce qui montre que la suite (v_n) est croissante.

5. On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n - v_n > 0$, donc on a

$0 < u_n - v_n < \leqslant \dfrac{1}{4^n}$

6. On sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} w_n = 0$.

7. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (l'une est croissante, l'autre décroissante et la limite de leur différence est égale à 0) : elles ont donc la même limite ℓ.

Par continuité la relation $v_n = \dfrac{2}{u_n}$, donne $\ell = \dfrac{2}{\ell} \iff \ell^2 = 2 \Rightarrow \ell = 2$ (la solution

$\ell = -\sqrt{2}$ n'est pas valide car la limite est positive).