∽ CONCOURS POUR L'ADMISSION EN FORMATION DES INGÉNIEURS ∾ DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE MARITIME

CORRIGÉ ANNÉE 2018

Durée : 2 heures

Le candidat traitera 3 questions au choix parmi les 4 proposées, chaque question représentant le même nombre de points.

1re question

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $I =]0\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln(x).$$

a. Sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction u somme de fonctions dérivables est dérivable et sur cet intervalle :

$u'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2+1}{x}$;

$2x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ et $x > 0$, donc $u'(x)$ quotient de termes supérieurs à zéro est supérieure à zéro.

La fonction u est donc strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

- On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$;
- On a $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, donc somme de limites $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = +\infty$.

b. D'après le résultat précédent u croît de $-\infty$ à $+\infty$; comme elle est dérivable donc continue sur $]0\ ;\ +\infty[$, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un rée unique $\alpha \in]0\ ;\ +\infty[$, tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$f(1) = -1$ et $f(2) \approx 2,69$, donc $\alpha \in]1\ ;\ 2[$;

$f(1,3) \approx -0,05$ et $f(1,4) \approx 0,3$, donc $\alpha \in]1,3\ ;\ 1,4[$;

$f(1,31) \approx -0,01$ et $f(1,32) \approx 0,02$, donc $\alpha \in]1,31\ ;\ 1,32[$;

$f(1,314) \approx -0,0003$ et $f(1,315) \approx 0,003$, donc $\alpha \in]1,314\ ;\ 1,315[$.

Donc au centième près $\alpha \approx 1,31$ (résultat admis).

c. Conclusion u croît de moins l'infini à zéro sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$ et croît ensuite de zéro à plus l'infini sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ +\infty[$.

Donc : $u(x) < 0$ sur $[0\ ;\ \alpha[$;

$u(\alpha) = 0$;

$u(x) > 0$ sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$.

d. On a démontré que $u(\alpha) = 0$, soit

$\alpha^2 - 2 + \ln\alpha = 0 \iff \ln\alpha = 2 - \alpha^2$.

2. On considère la fonction f définie sur I par

$$f(x) = x^2 + [2 - \ln(x)]^2.$$

a. Sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction f somme de fonctions dérivables est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = 2x + 2[2 - \ln(x)] \times (-\dfrac{1}{x} = 2x + 2[2 - \ln(x)] \times \left(\dfrac{-1}{x}\right) = 2x + \dfrac{-4}{x} + \dfrac{2\ln x}{x}$.

En factorisant $\dfrac{1}{x}$ on peut écrire :

$f'(x) = \dfrac{1}{x}\left(2x^2 - 4 + 2\ln x\right) = \dfrac{2}{x}\left(x^2 - 2 + \ln x\right)$.

Conclusion sur $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2u(x)}{x}$.

b. Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est donc celui de $u(x)$ qui a été trouvé à la question **1. c.**.
Donc sur $[0\,;\,\alpha[$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur cet intervalle ;
sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur cet intervalle ;
$f'(\alpha) = 0$: la fonction f a donc un minimum en α.

c. Le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est :
$f(\alpha) = \alpha^2 + [2 - \ln\alpha]^2$ Or on a vu à la question **1. d.** que $\ln\alpha 2 - \alpha^2$, donc on peut écrire :
$f(\alpha) = \alpha^2 + [2 - \left(2 - \alpha^2\right)]^2 = \alpha^2 + \left[\alpha^2\right]^2 = \alpha^2 + \alpha^4 = \alpha^2\left(1 + \alpha^2\right)$.

3. **a.** Avec $\mathrm{A}(0\,;2)$ et $M(x\,;\,\ln x)$, on a :
$+\,\mathrm{A}M^2 = (x-0)^2 + (\ln x - 2)^2 = x^2 + (2 - \ln x)^2 = f(x)$.
Remarque du correcteur : ici on constate un oubli dans l'énoncé : il aurait fallu demander à la question **2. b.** les limites de la fonction f pour trouver le signe de $f(x)$, ce qui est fait ci-dessous.
On a vu à la question **2. b.** que $f(\alpha)$ est le minimum de la fonction sur $]0\,;\,+\infty[$; or $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^4$ est clairement supérieur à 0 car somme de deux termes supérieurs à 0.
Ce minimum étant positif, la fonction est donc positive sur $]0\,;\,+\infty[$, donc
$\mathrm{A}M^2 = f(x) \Rightarrow \mathrm{A}M = \sqrt{f(x)}$.

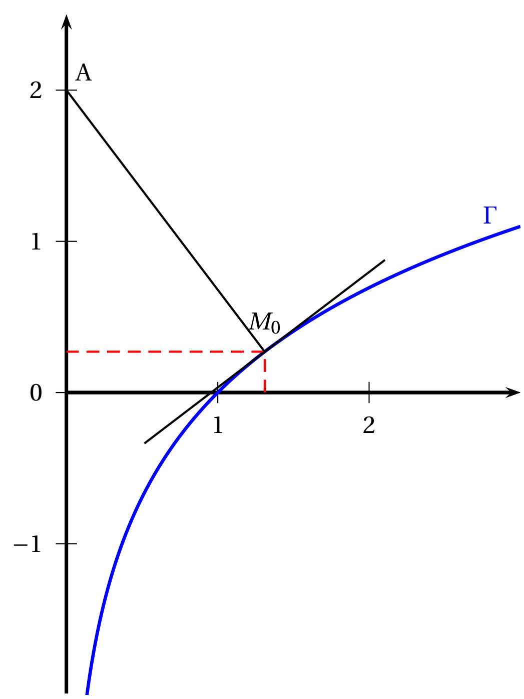
b. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ étant croissante la fonction $x \longmapsto \sqrt{f(x)}$ a les mêmes variations que la fonction f, donc $\sqrt{f(\alpha)}$ est le minimum de la fonction $x \longmapsto \sqrt{f(x)}$. L'abscisse du point M_0 est donc α et son ordonnée $\ln\alpha$.

c. D'après la question précédente :
$\mathrm{A}M_0 = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \sqrt{\alpha^2\left(1 + \alpha^2\right)} = \sqrt{\alpha}^2 \times \sqrt{1\alpha^2} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.

d. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{A}M_0}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\alpha - 0\\ \ln\alpha - 2\end{pmatrix}$.

La tangente en M_0 à Γ a pour vecteur directeur : $\overrightarrow{t_0}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}$, ou encore plus simplement $\alpha\,\overrightarrow{t_0}\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{\mathrm{A}M_0}\cdot\alpha\,\overrightarrow{t_0} = \alpha \times \alpha + 1 \times (\ln\alpha - 2) = \alpha^2 + \ln\alpha - 2 = 0$ (d'après la question **1. d.**.
Les vecteurs sont dont donc orthogonaux, donc la droite $(\mathrm{A}M_0)$ est perpendiculaire à la tangente à Γ en M_0.



2^e^ question

1. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+1}.$$

a. La fonction est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2}$ ce quotient de termes positifs est positif, donc la fonction est croissante sur $[0~;~+\infty[$.
- $f(0) = 5 - 4 = 1$;
- Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 4x+1 = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$.

b. $f(x) = x \iff 5 - \dfrac{4}{x+1} = x \iff 5x+5-4 = x^2+x \iff x^2-4x-1 = 0$.
$\Delta = 16+4 = 20 = (2\sqrt{5})^2$: l'équation a donc deux solutions :
$x_1 = \dfrac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2+\sqrt{5}$ et $x_2 = \dfrac{4-2\sqrt{5}}{2} = 2-\sqrt{5}$.
Or $x_2 < 0$, donc n'appartient pas à l'ensemble de définition.
L'équation $f(x) = x$ admet donc une unique solution $\alpha = 2+\sqrt{5} \approx 4,25$.

c. On a vu que f est croissante sur $[0~;~+\infty$Û, donc en particulier sur $[0~;~\alpha]$ et elle croît de $f(0) = 1$ à $f(\alpha) = \alpha$; donc pour tout $x \in [0~;~\alpha]$, $f(x) \in [0~;~\alpha]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. a. uř$1 = f(u_0) = 5 - \dfrac{4}{0+1} = 5-4 = 1$.

b. Pour construire les points P on part de $u_1 = 1$ et l'on fait verticalement « vers la courbe » puis horizontalement « vers la droite $y = x$ ».

c. On peut conjecturer que la suite est croissante et qu'elle converge vers α.

d. *Initialisation* : On a vu que $u_0 < u_1$: la relation est vraie pour $n = 0$.
Hérédité Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < u_{n+1} < \alpha$.
La fonction f étant croissante sur $[0~;~+\infty[$, les images par f des termes de l'encadrement précédent sont rangés dans le même ordre, soit :
$f(0) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(\alpha)$ ou encore
$0 < u_{n+1} < u_{n+1} < \alpha$: la relation est vraie au rang $n+1$.
La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle est vraie au rang $n+1$; on a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < u_{n+1} < \alpha$.

e. *Remarque du correcteur* : là encore une inexactitude de l'énoncé : il aurait fallu demander de démontrer que
$0 < u_n < u_{n+1} \leqslant \alpha$. D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par α : elle converge donc vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant \alpha$.
On peut donc à ce moment dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

f. Demander un nombre ϵ
Affecter 0 à n
Tant que $|u_n - \alpha| \geqslant \epsilon$
    Affecter $n+1$ à n
Afficher n.

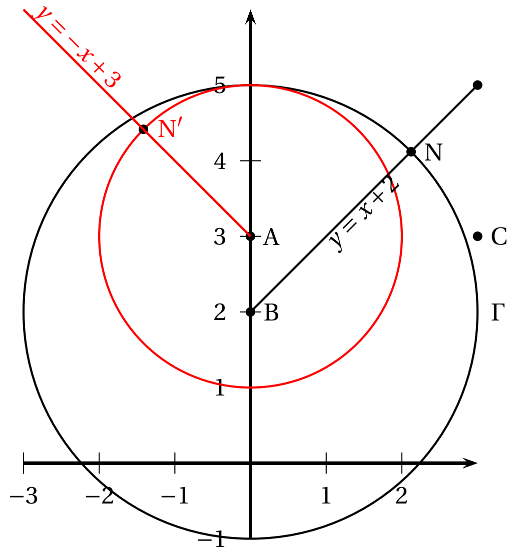
3. En partant d'un point de l'axe des abscisses d'abscisse positive et en suivant le principe « verticalement vers la courbe » puis « horizontalement vers la droite d'équation $y = x$ » on peut conjecturer que :
- si $u_0 < \alpha$, la suite est croissante et a pour limite α ;
- si $u_0 > \alpha$, la suite est décroissante et a pour limite α.

3$^{\text{e}}$ question

On notera A le point d'affixe $a = 3\text{i}$, B le point d'affixe $b = 2\text{i}$ et C le point d'affixe $c = 3\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

On considère l'application f qui, à tout point M du plan d'affixe z différent de B, associe le point M' du plan d'affixe $z' = \dfrac{3\text{i}z}{z-2\text{i}}$.

1. • $z_{\text{A}'} = \dfrac{3\text{i}\times 3\text{i}}{3\text{i}-2\text{i}} = \dfrac{-9}{\text{i}} = 9\text{i}$;
   $c = 3\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3+3\text{i}$.
   • $z_{\text{C}'} = \dfrac{3\text{i}(3+3\text{i})}{3+3\text{i}-2\text{i}} = \dfrac{9\text{i}-9}{3+\text{i}} = \dfrac{(9\text{i}-9)(3-\text{i})}{(3+\text{i})(3-\text{i})} = \dfrac{27\text{i}+9-27+9\text{i}}{9+1} = \dfrac{-18+36\text{i}}{10} = -\dfrac{9}{5} + \dfrac{18}{5}\text{i}$.
2. Il faut trouver s'il existe un nombre complexe z tel que :
   $\text{i} = \dfrac{3\text{i}z}{z-2\text{i}} \iff 1 = \dfrac{3z}{z-2\text{i}} \iff z-2\text{i} = 3z \iff -2\text{i} = 2z \iff -\text{i} = z$.
   Le point D d'affixe $-\text{i}$ a pour image par f le point D$'$ d'affixe i.
3. $z_{M'} = z_M \iff z = \dfrac{3\text{i}z}{z-2\text{i}} \iff 1 = \dfrac{3\text{i}z}{z-2\text{i}}$ (si $z \neq 0$) $\iff z-2\text{i} = 3\text{i} \iff z = 5\text{i}$.
   Le point d'affixe 5i est invariant par f.
4. Pour $z \neq 2\text{i}$, on a :
   $z' - 3\text{i} = \dfrac{3\text{i}z}{z-2\text{i}} - 3\text{i} = \dfrac{3\text{i}z - 3\text{i}(z-2\text{i})}{z-2\text{i}} = \dfrac{-6}{z-2\text{i}}$.
5. L'égalité précédente $z' - 3\text{i} = \dfrac{-6}{z-2\text{i}}$ implique en prenant les normes :
   $\left|z'-3\text{i}\right| = \left|\dfrac{-6}{z-2\text{i}}\right| \iff \text{A}M' = \dfrac{6}{\text{B}M}$
   Si M appartient au cercle Γ de centre B et de rayon 3, alors B$M = 3$, donc l'égalité précédente s'écrit : A$M' = \dfrac{6}{3} = 2$ ce qui signifie que le point M' appartient au cercle de centre A et de rayon 2.
6. On a vu que l'égalité (*) pouvait s'écrire $z' - 3\text{i} = \dfrac{-6}{z-2\text{i}}$ ce qui donne en prenant les arguments :
   $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{A}M'}\right) = \arg(-6) - \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{B}M}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{B}M}\right)$.
7. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{B}N}$ est $\dfrac{3}{\sqrt{2}} + \left(2 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right) - 2\text{i} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\text{i}$, donc
   B$N^2 = \dfrac{9}{2} + \dfrac{9}{2} = 9 = 3^2$, donc B$N = 3$: le point N appartient à Γ.
   Puisque les parties réelle et imaginaires de $\overrightarrow{\text{B}N}$ sont égales un argument de cette affixe est $\dfrac{\pi}{4}$.
   Conclusion $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{B}N}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
8. D'après les questions **5.** et **6.**, puisque N appartient à Γ son image N$'$ appartient au cercle de centre A de rayon 2 et puisqu'un argument de $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{B}N}\right)$ est égale à $\dfrac{\pi}{4}$, il suffit dans ce cercle de tracer la bissectrice du premier cadran.
   Pour placer le point N il suffit de remarquer d'après l'écriture de son affixe que son ordonnée est égale à son abscisse augmentée de 2, autrement dit que ce point appartient à la droite d'équation $y = x+2$.
   Cette droite contient B$(0\,;\,2)$ et par exemple le point de coordonnées $(3\,;\,5)$.
   D'après les questions **5.** et **6.** le point N$'$ appartient donc au cercle de A et de rayon 2 et on a $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{A}N'}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{B}N}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.
   La droite (AN') contient le point A$(0\,;\,3)$ et a donc un coefficient directeur égal à -1 ; une de ses équations est donc $y = 3 - x$. Voir ci-dessous :



4ᵉ question

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(-4\,;\,0\,;\,1) \quad ; \quad B(3\,;\,3\,;\,-1) \quad ; \quad C(1\,;\,5\,;\,1) \text{ et } \quad D(0\,;\,2\,;\,6).$$

1. On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont clairement pas colinéaires donc les droites (AC) et (BC) ne sont pas parallèles : les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. On a $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = -10+10+0 = 0$:les vecteurs sont orthogonaux les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires, donc le triangle ABC est rectangle en C.

On a $\text{ABC} = \dfrac{\text{AC}\times\text{BC}}{2}$.

On a $\text{AC}^2 = 25+25 = 2\times 25 \Rightarrow \text{AC} = 5\sqrt{2}$;

De même $\text{BC}^2 = 4+4+4 = 12 \Rightarrow \text{BC} = \sqrt{2}\sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$. Donc $\text{ABC} = \dfrac{5\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{6}$.

3. Soit $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux réels.

a. $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan donc est orthogonal à deux vecteurs de ce plan non colinéaires comme d'après la question **1.**, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

On a donc : $\left\{\begin{array}{ccc}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC} & = & 0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BC} & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc}5+5b & = & 0\\ -2+2b+2c & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc}b & = & -1\\ -2-2+2c & = & 0\end{array}\right. \iff$ $\left\{\begin{array}{ccc}b & = & -1\\ c & = & 2\end{array}\right.$

Donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

b. On sait que si $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC), une équation de ce plan est :

$1x - 1y + 2z + d = 0 \iff x - y - 2z + d = 0$.

Or $A \in (\text{ABC}) \iff -4+0+2+d = 0 \iff d = 2$.

Une équation du plan (ABC) est donc :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{ABC} \iff x - 2y + 2z + 2 = 0$.

c. $D(0\ ;\ 2\ ;\ 6) \in \text{ABC} \iff 0-4+12+2=0 \iff 8=0$: cette égalité est fausse donc D n'appartient pas au plan (ABC).

4. **a.** Si d la droite est orthogonale à (ABC) et contient D tout vecteur directeur de (d) est colinéaire à $\overrightarrow{n}$.

On a donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \iff \overrightarrow{\text{D}M} = t\overrightarrow{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & 0+t\\ y=2-t & & \qquad t\in\mathbb{R}.\\ z & = & 6+2t\end{array}\right.$$

b. Si $\text{H}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est le point commun à (d) et au plan (ABC) ses coordonnées vérifient l'équation paramétrique de (d) et l'équation du plan, soit :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x & = & 0+t\\ y=2-t & & \\ z & = & 6+2t\\ x-y+2z+2 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c r}x & = & 0+t\\ y=2-t & & \\ z & = & 6+2t\\ t-2+t+12+4t+2 & = & 0\end{array}\right.$$

La dernière équation s'écrit $6t=-12 \iff t=-2$. Donc $\text{H}(-2\ ;\ 4\ ;\ 2)$.

5. **a.** De $\overrightarrow{\text{DH}}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$, on déduit :

$\text{DH}^2 = 4+4+16=24 \Rightarrow \text{DH} = 2\sqrt{6}$.

b. Puisque D n'appartient pas au plan (ABC), ABCD est un tétraèdre de hauteur [DH] ; volume est donc :

$\mathcal{V}(\text{ABCD}) = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}(\text{ABC} \times \text{DH} = \dfrac{5\sqrt{6}\times 2\sqrt{6}}{3} = \dfrac{10\times 6}{3} = 20$.

6. Dans le triangle ADB) la relation d'Al-Kaschi s'écrit :

$\text{AB}^2 = \text{AD}^{+}\text{DB}^2 - 2\text{AD}\times\text{DB}\times\cos\widehat{\text{ADB}} \iff \cos\widehat{\text{ADB}} = \dfrac{\text{AD}^{+}\text{DB}^2-\text{AB}^2}{2\text{AD}\times\text{DB}}$.

On a $\text{AD}^2 = 16+4+25=45$; d'où $\text{AD} = \sqrt{45}$;

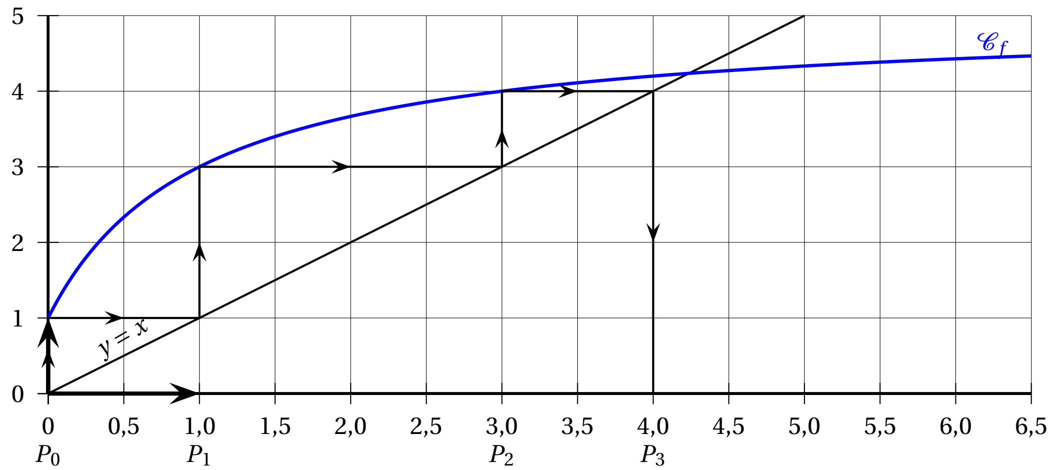
$\text{DB}^2 = 9+1+49=59$; d'où $\text{DB} = \sqrt{59}$

$\text{AB}^2 = 49+9+4=62$.

Finalement : $\cos\widehat{\text{ADB}} = \dfrac{45+59-62}{\times\sqrt{45}\times\sqrt{59}} = \dfrac{21}{\sqrt{45}\times\sqrt{59}} \approx 0,407$.

La calculatrice donne $\widehat{\text{ADB}} \approx 65,9°$.

Annexe à rendre avec la copie



Nota :

1. Aucun document n'est autorisé.
2. Délits de fraude : « Tout candidat pris en flagrant délit de fraude ou convaincu de tentative de fraude se verra attribuer la note zéro, éliminatoire, sans préjudice de l'application des sanctions prévues par les lois et règlements en vigueur réprimant les fraudes dans les examens et concours publics ».